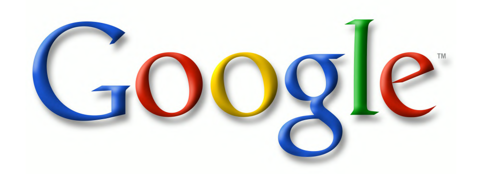
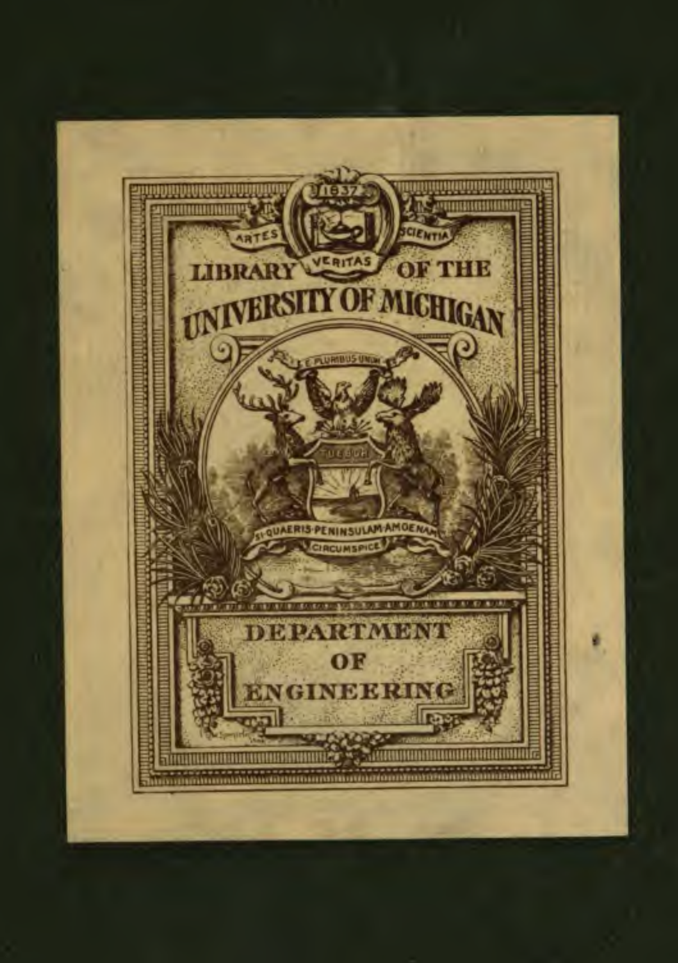


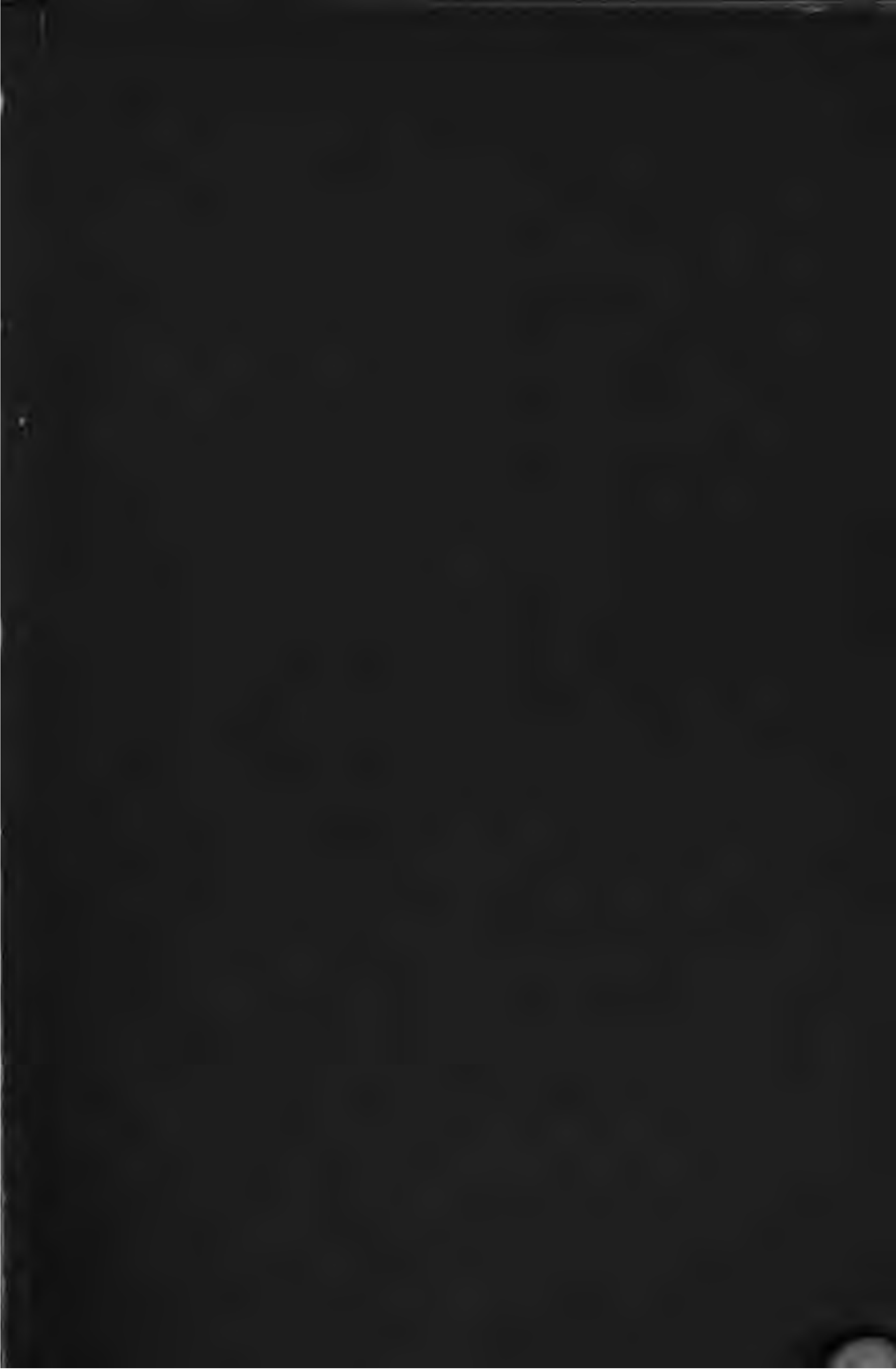
Hans Busch

Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik



Verlag von S. Hirzel in Leipzig.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik

Von

Dr. Hans Busch

Assistent am Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen

Mit 69 Figuren



Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1913.

Vorwort.

Die Schrift, die ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, bildet die Erweiterung einer von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen angenommenen Inauguraldissertation. Neu hinzugekommen ist § 16; jedoch sind auch die §§ 13—15 in der vor etwa Jahresfrist veröffentlichten Dissertation noch nicht zum Abdruck gelangt, so daß das Kapitel IV, welches der Anwendung der in den ersten drei Kapiteln gebrachten allgemeineren Betrachtungen auf die Praxis gewidmet ist, jetzt zum ersten Male veröffentlicht wird.

Die Labilitätserscheinungen spielen in der Elektrotechnik eine große Rolle; wir begegnen ihnen beim Lichtbogen, bei der Nernstlampe, bei Dynamomaschinen und Motoren; namentlich bei letzteren haben diese Erscheinungen in neuerer Zeit ein besonderes Interesse gefunden, seit die Wendepolmotore ihre große Verbreitung erlangt haben. Aus diesem Grunde glaube ich, daß die vorliegende Schrift, in der die wichtigsten jener Erscheinungen von einheitlichen Gesichtspunkten aus behandelt sind, auch bei einem weiteren Kreise, insbesondere auch bei den Praktikern Interesse finden wird.

Die Arbeit gliedert sich in einen vorwiegend theoretischen (Kapitel I—III) und einen mehr praktischen Teil (Kapitel IV); jedoch ist diese Einteilung nicht streng durchgeführt; namentlich sind im ersten Teile verschiedentlich praktisch wichtige Fälle als erläuternde Beispiele behandelt worden. Kapitel I befaßt sich mit

der Stabilität elektrischer Stromkreise; ausgehend von der Kaufmannschen Stabilitätsbetrachtung, die an einer Reihe von Beispielen erläutert wird, werden kompliziertere Fälle behandelt, dazwischen sind zwei Paragraphen (§ 4 und 6) eingeschoben, die allgemeineren Betrachtungen gewidmet sind. Im II. Kapitel wird die Stabilität der mechanischen Energieübertragung erörtert, während in Kapitel III einfache Beispiele behandelt werden, bei denen sowohl die elektrischen, als auch die mechanischen Verhältnisse von Einfluß auf die Stabilität sind; durch Auffassung der Gleichstrommaschine als Kondensator gelingt es, die Behandlung solcher Fälle auf die Untersuchung der rein elektrischen Stabilität (Kapitel I) zurückzuführen. Das letzte Kapitel schließt sich eng an Kapitel III an; während in diesem an Hand einfacher, aber praktisch unwichtiger Beispiele die Grundzüge der auftretenden Erscheinungen erläutert werden, werden in Kapitel IV solche Probleme behandelt, wie sie in der Praxis vorkommen; insbesondere das Pendeln der Wendepolmotore, das heute im Vordergrund des Interesses steht, ist ausführlich erörtert worden.

Das Buch will vor allen Dingen zeigen, nach welchen allgemeinen Methoden sich die Frage der Stabililät oder Labilität in der Elektrotechnik immer beantworten läßt. Wenn es sich dabei auch bemüht, zur Erläuterung seiner allgemeinen Gesichtspunkte möglichst viele, vor allem auch alle praktisch wichtigen Fälle als Beispiele heranzuziehen, — wobei mehrfach neue und überraschende Fälle der Labilität an der Hand der Theorie entdeckt werden konnten, — so erhebt es doch nicht den Anspruch, alle denkbaren oder auch nur alle schon beobachteten Fälle erschöpft zu haben. Es bedarf jedoch vielleicht einer besonderen Rechtfertigung, daß wir einen Fall hier nicht behandelt haben, der in der Praxis von großer Wichtigkeit ist: der Fall des Pendelns parallel arbeitender Wechselstrommaschinen. Der Zusammenhang dieser Erscheinung mit den von uns behandelten Problemen ist aber ein mehr äußerlicher. Die Erscheinung des Pendelns hat in beiden

Fällen verschiedene Ursachen. Zwar ist von Föppl[1]) die Auffassung vertreten worden, daß die Pendelungen ihre Ursache in einer ähnlichen Art von Instabilität haben, wie wir sie in dieser Schrift behandelt haben; jedoch sprechen gewichtige Gründe[2]) dafür, daß das Pendeln von Wechselstrommaschinen in der weitaus größten Zahl der beobachteten Fälle eine ganz andere Ursache hat, nämlich eine Resonanzerscheinung ist, die dadurch zustande kommt, daß einerseits ein aus zwei parallel geschalteten Wechselstrommaschinen bestehendes System eine ausgesprochene Eigenschwingung hat, andererseits diesem System durch den ungleichförmigen Gang der antreibenden Dampf- oder Gasmaschine („bei Antrieb durch Turbinen treten die Pendelungen erfahrungsgemäß nicht oder nicht deutlich auf“ [3])) eine erzwungene Schwingung aufgedrückt wird; das starke Pendeln tritt dann auf, wenn die Periodendauern beider Schwingungen einander vergleichbar werden.

Diese Erscheinungen gehören also nicht in den Rahmen dieses Buches. Wenn sonst noch Lücken darin vorhanden sein sollten, so bitte ich das damit zu entschuldigen, daß bisher nur wenig Literatur über den behandelten Gegenstand vorlag; ich hoffe, daß das Buch selbst indirekt zur Ausfüllung dieser Lücken beitragen wird, indem es den einen oder anderen Fachgenossen zur Weiterarbeit auf dem Gebiete der Labilitätserscheinungen anregt.

Ein alphabetisches Sachregister war bei der besonderen Art des Buches zwecklos. Dafür ist aber das Inhaltsverzeichnis so ausführlich und übersichtlich gehalten, daß man mit seiner Hilfe jeden behandelten Gegenstand mühelos finden wird.

Die Arbeit wurde im Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen ausgeführt. Dem Leiter dieses Instituts, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Herm. Th. Simon,

---

1) A. Föppl, Elektrot. Ztschr. 23, S. 59, 1902.

2) A. Sommerfeld, Elektrot. Ztschr. 25, S. 273, 1904; E. Rosenberg, ebenda, S. 395.

3) A. Sommerfeld, l. c.

sei auch an dieser Stelle herzlichst gedankt für das Interesse und die Unterstützung, die er dieser Arbeit durch Rat und Tat zuteil werden ließ. Auch dem Verleger, Herrn S. Hirzel, bin ich zu Dank verpflichtet für das Entgegenkommen, das er mir trotz der hohen Anforderungen, die an seine Geduld gestellt wurden, bewies.

Göttingen, Dezember 1912.

Hans Busch.

Inhalt.

Kapitel I.

Die Stabilität der stationären Bewegung von Elektrizität.

Kapitel II.

Die Stabilität der stationären Bewegung rotierender Massen.

Kapitel III.

Die mechanisch-elektrische Stabilität.

Kapitel IV.

nwendungen auf praktische Fälle.

Kapitel I.

Die Stabilität der stationären Bewegung von Elektrizität.

I. Einfacher Stromkreis.

§ 1. Ableitung des Stabilitätskriteriums.

Wir denken uns eine ideale Batterie, deren Klemmenspannung vollkommen konstant gleich E_0 sei; sie sei durch einen Widerstand W geschlossen. Dann fließt durch W nach dem Ohmschen Gesetz ein Strom

$$J = \frac{E_0}{W}.$$

Man sagt: um durch den Widerstand W einen Strom J hindurch zu treiben, ist eine elektromotorische Kraft (EMK.) nötig von der Größe

$$E_0 = J \cdot W.$$

Dabei faßt man die Spannung oder elektromotorische Kraft als Ursache des Stromes auf. Man kann aber auch umgekehrt die Spannungsdifferenz an den Klemmen des Widerstandes als Wirkung des Stromes auffassen und sagen: Wenn durch W ein Strom J hindurchfließt, so erzeugt er in W einen Spannungsabfall $e = J W$. Damit ist das vorliegende Problem zu einem Gleichgewichtsproblem geworden: Die Batteriespannung E_0 muß dem Spannungsabfall e das Gleichgewicht halten; im stationären Zustande muß

$$E_0 = e = J W$$

sein. Diese Auffassung hat sich für viele Fälle als fruchtbar

erwiesen; z. B. ergeben sich aus ihr die Kirchhoffschen Regeln ohne weiteres.

Nach der Stabilität des Gleichgewichtes zu fragen, dazu lag so lange keine Veranlassung vor, als man sich nur mit Fällen beschäftigte, die dem Ohmschen Gesetze gehorchten, d. h. bei denen die Widerstände W und die Batteriespannungen E im wesentlichen konstant waren. Da bei den Experimenten sich stets der berechnete Gleichgewichtszustand auch wirklich einstellte, wurde es als selbstverständlich angesehen, daß das Gleichgewicht immer stabil sei. Erst als man anfing, sich mit Leitern zu beschäftigen, deren Verhalten wesentlich vom Ohmschen Gesetze abwich, nämlich mit gasförmigen Leitern, stieß man auf Erscheinungen, die auf die Möglichkeit labiler Zustände hindeuteten.

Die Frage ist zum ersten Mal von Kaufmann [1]) systematisch untersucht worden; seine Betrachtungen wurden später durch Simon [2]) erweitert. Im folgenden seien die Kaufmannschen Überlegungen in verallgemeinerter Form mitgeteilt.

Wir betrachten einen Stromkreis, der sich von dem oben behandelten in zwei Punkten unterscheidet:

1. Die Spannung der Stromquelle, des „Generators", soll nicht mehr konstant sein, sondern soll von der Stromstärke J abhängen:

$$E = E(J);$$

2. Die Klemmenspannung am Widerstande, dem „Verbraucher", soll nicht mehr proportional dem Strome sein, sondern eine beliebige Funktion desselben:

$$e = e(J).$$

Außerdem setzen wir voraus, daß der Stromkreis eine gewisse Selbstinduktion L enthält, daß aber im übrigen sowohl E wie auch e einzig und allein von J abhängen.

Wir fragen zunächst: Welcher Gleichgewichtszustand bzw. welche Gleichgewichtszustände sind möglich?

Da E und e ganz beliebige Funktionen von J sein sollen, so ist es zweckmäßig, ein graphisches Verfahren anzuwenden, wie es zuerst von Hopkinson [3]) benutzt worden ist. Wir tragen

---

1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. (4) 2, 158, 1900.

2) H. Th. Simon, Physik. ZS. 6, 297—319, 1905.

3) Hopkinson, Proc. Inst. of Mech. Engineers, April 1879 und April 1880; abgedruckt in: Hopkinson, Technical Papers, S. 32 u. 45. Cambridge 1901.

(Fig. 1) den Strom J als Abszisse, die Spannungen E bzw. e als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf und erhalten so zwei Kurven, die wir mit Deprez die „charakteristische Kurve" oder kurz „Charakteristik" des Generators bzw. des Verbrauchers nennen. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist:

$$E(J) = e(J); \tag{1}$$

sämtliche mögliche Gleichgewichtszustände des Systems sind daher gegeben durch die Schnittpunkte S der beiden Charakteristiken. Wir wollen einen bestimmten Gleichgewichtszustand (Punkt S) betrachten und den ihm entsprechenden Gleichgewichtswerten der Variablen den Index 0 geben; für sie gilt:

$$E(J_0) = E_0 = e(J_0) = e_0. \tag{1a}$$

Die Bedingung dafür, daß das Gleichgewicht stabil ist, ist die, daß einmal vorhandene kleine Abweichungen von diesem Zustande (Störungen) im Laufe der Zeit von selbst verschwinden. Wir müssen deshalb das Gesetz für den zeitlichen Verlauf kleiner Abweichungen vom Gleichgewichtszustande ableiten. Wir nehmen dazu an, Strom J und Spannungen E und e weichen um kleine Beträge J_1 und E_1, bzw. e_1 von den Gleichgewichtswerten J_0, E_0 und e_0 ab und setzen dementsprechend:

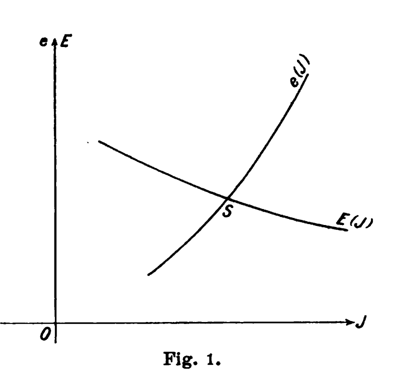


Fig. 1.

$$J = J_0 + J_1; \quad E = E_0 + E_1; \quad e = e_0 + e_1. \tag{2}$$

Jetzt ist, da kein Gleichgewicht mehr vorhanden ist, Gleichung (1) zu ersetzen durch die allgemeinere Gleichung:

$$E = e + L\frac{dJ}{dt} \tag{3}$$

(t bedeutet die Zeit).

Einsetzung der Gleichungen (2) ergibt:

$$E_0 + E_1 = e_0 + e_1 + L\frac{dJ_1}{dt},$$

oder, wegen (1a):

$$E_1 = e_1 + L\frac{dJ_1}{dt}. \tag{4}$$

Nun ist

$$E_0 + E_1 = E(J_0 + J_1).$$

Die rechte Seite können wir nach dem Taylorschen Satze entwickeln und die Entwicklung, da J_1 klein ist, nach dem ersten, in J_1 linearen Gliede abbrechen (d. h. geometrisch: wir können die charakteristische Kurve innerhalb des kleinen in Betracht kommenden Intervalls als geradlinig betrachten):

$$E_0 + E_1 = E(J_0) + J_1 \left(\frac{dE}{dJ}\right)_{J=J_0}$$ [1]

und mit Rücksicht auf Gl. (1a):

$$E_1 = J_1 \left(\frac{dE}{dJ}\right)_{J=J_0} = J_1 \cdot E'(J_0) \tag{5}$$

und ebenso

$$e_1 = J_1 \left(\frac{de}{dJ}\right)_{J=J_0} = J_1\, e'(J_0). \tag{6}$$

Die Gleichungen (4), (5) und (6) sind bestimmend für den Verlauf der Abweichungen vom Gleichgewichtszustande; eliminieren wir aus ihnen zwei der abhängigen Variablen, z. B. E_1 und e_1, so erhalten wir für die dritte die Differentialgleichung:

$$0 = J_1\,(e' - E') + L\frac{dJ_1}{dt}$$

oder

$$\frac{dJ_1}{dt} = -\frac{1}{L}(e' - E') \cdot J_1. \tag{7}$$

Dieselbe Differentialgleichung gilt für E_1 und e_1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine einmal vorhandene Störung J_1 im Laufe der Zeit verschwindet (wie es zur Stabilität erforderlich ist), ist hier, daß $\frac{dJ_1}{dt}$ stets das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie J_1, denn dann und nur dann muß der absolute Betrag von J_1 beständig abnehmen. Dazu muß, da L positiv ist,

$$e'(J_0) - E'(J_0) > 0 \qquad \textbf{(Kriterium } A\textbf{)}$$

---

1) Ob man das Zeichen für totale $\left(\frac{d}{dJ}\right)$ oder partielle $\left(\frac{\partial}{\partial J}\right)$ Differentiation (Kaufmann) anwendet, ist an sich gleichgültig, weil wir ausdrücklich vorausgesetzt haben, daß E und e nur von J abhängen sollen. Vielleicht ist, um diese Voraussetzung hervorzuheben, die hier gewählte Schreibweise vorzuziehen.

sein. Das ist das verallgemeinerte Kaufmannsche Stabilitätskriterium einer elektrischen Strömung, das wir, wo wir in der Folge Bezug darauf nehmen werden, Kriterium A nennen wollen.

Dasselbe hat eine einfache geometrische Bedeutung: Nach Gleichung (5) und (6) sind $e'(J_0)$ und $E'(J_0)$ die Differentialquotienten der Funktionen $e(J)$ und $E(J)$ für den Wert J_0 des Arguments. Im Charakteristikendiagramm (Fig. 1) sind diese Differentialquotienten gleich den trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Charakteristiken gegen die Abszissenachse, kurz: gleich dem „Anstieg" der Charakteristiken im Betriebspunkte S; dabei ist das Wort „Anstieg" (ebenso „ansteigen") in erweitertem Sinne gebraucht, so daß es den Begriff „Abfall" (nega-

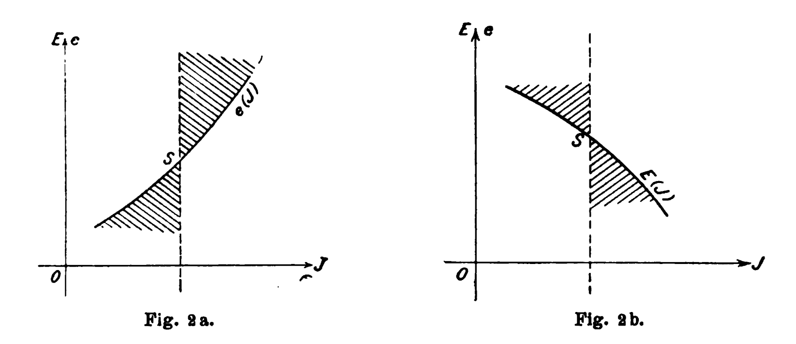


Fig. 2a. Fig. 2b.

tiver Anstieg) mit umfaßt. Kriterium A sagt also aus: *Damit der Betriebszustand in Punkt S stabil ist, muß dort die Charakteristik des Verbrauchers steiler ansteigen als die des Generators.* Wir können auch so sagen: In der Nähe des Schnittpunktes S muß die Generatorcharakteristik $E(J)$ links von einer durch S gezogenen Vertikalen oberhalb und rechts von ihr unterhalb der Verbrauchercharakteristik $e(J)$ verlaufen; sie darf dort nicht in dem in Fig. 2a schraffierten Winkelraum liegen. Oder, wenn wir von der Generatorcharakteristik ausgehen: In der Nähe des Punktes S muß die Verbrauchercharakteristik $e(J)$ links von der Vertikalen durch S unterhalb und rechts von ihr oberhalb der Generatorcharakteristik verlaufen, sie darf dort nicht in dem in Fig. 2b schraffierten Winkelraum liegen.

Bemerkenswert ist, daß in dem Stabilitätskriterium A die Größe der Selbstinduktion L, die wir zur Ableitung der Be-

dingung brauchten, nicht mehr vorkommt. Man darf aber daraus nicht etwa schließen, daß das Vorhandensein von Selbstinduktion unwesentlich für die Stabilitätsbedingung sei. Denn wenn man für einen induktionslosen Kreis unter der Annahme, eine Kapazität sei parallel zum Verbraucher geschaltet, das Stabilitätskriterium ableitet, so erhält man bei abfallender Verbraucher- und Generator-Charakteristik, wie K. W. Wagner[1] gezeigt hat, die unserem Kriterium A gerade entgegengesetzte Bedingung; da in diese Bedingung die Größe der Kapazität C nicht eingeht, könnte man hieraus für einen induktions- und kapazitätsfreien Kreis mit demselben Rechte, wie vorhin das Kriterium A, so jetzt das gerade entgegengesetzte Kriterium erhalten. Dieser Widerspruch erklärt sich durch die Tatsache, daß es in der Natur keine wirklich induktions- und kapazitätsfreien Kreise gibt; vielmehr hat jedes Leitersystem eine angebbare, wenn auch oft sehr kleine, Selbstinduktion und Kapazität. Wenn man von einem induktions- oder kapazitätsfreien Kreise schlechtweg spricht, so meint man damit auch gar nicht, daß der Kreis absolut keine Selbstinduktion oder Kapazität besitzt, vielmehr soll durch diese Ausdrucksweise nur gesagt werden: die Selbstinduktion oder Kapazität des Kreises ist so klein, daß die Vorgänge, die man betrachtet, sich für unsere Beobachtung genau so abspielen, als ob Kapazität oder Selbstinduktion nicht vorhanden wären. Diese Ausdrucksweise ist daher nur dann zulässig, wenn der betrachtete Vorgang ein solcher ist, daß sein Verlauf bei genügend kleiner Selbstinduktion L oder Kapazität C praktisch unabhängig vom Betrage dieser beiden Größen wird, oder, mathematisch gesprochen, daß der Grenzübergang zu $L = 0$ bzw. $C = 0$ einen Sinn hat. Nun ist diese Unabhängigkeit zwar vorhanden, wenn der Kreis große Selbstinduktion und sehr kleine Kapazität (Fall des Kriterium A) oder umgekehrt große Kapazität und sehr kleine Induktion (Wagner) enthält; denn nach obigem kann die Kapazität nur die Wirkung haben, das Stabilitätskriterium umzukehren, sie wirkt der Selbstinduktion entgegen (ein Blick auf Gleichung (7) lehrt, daß sie wie eine negative Selbstinduktion wirkt); die Wirkung einer sehr kleinen Kapazität ist daher gegenüber derjenigen einer merklichen Selbstinduktion — und ebenso die einer sehr kleinen

1) K. W. Wagner, Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Diss. Göttingen 1910, auch als Buch bei S. Hirzel, Leipzig 1910. S. 7.

Selbstinduktion gegenüber derjenigen einer beträchtlichen Kapazität — vollkommen zu vernachlässigen; unser Kriterium A besteht also, falls merkliche Selbstinduktion vorhanden ist, zu Recht, ebenso die Wagnersche Überlegung, falls erhebliche Kapazität vorhanden ist. Ist dagegen sowohl L als auch C sehr klein („praktisch induktions- und kapazitätsfreier Kreis"), so versagt diese Überlegung; wir können ohne weiteres nicht sagen, ob auch in diesem Falle die Vorgänge nach einer Gleichgewichtsstörung unabhängig vom Betrage der Größen L und C verlaufen; wir müssen vielmehr, um diese Frage zu entscheiden, das Stabilitätskriterium für einen Kreis, der gleichzeitig Kapazität und Selbstinduktion enthält, aufstellen und dann versuchen, gleichzeitig für $L = 0$ und $C = 0$ zur Grenze überzugehen. Wir werden hierauf in § 5 zurückkommen[1]).

---

1) Wagner hat am selben Orte auf ganz anderem Wege versucht, da Stabilitätskriterium für einen induktions- und kapazitätsfreien Kreis abzuleiten. Sein Gedankengang lautet in einer unserer bisherigen Ausdrucksweise entsprechenden Fassung etwa so:

Die Generatorcharakteristik sei in der Form

$$J = F(E) \tag{1'}$$

gegeben; $F(E)$ ist also die inverse Funktion von $E(J)$ und es ist $\frac{dF}{dE} = \frac{1}{E'(J)}$.
Die Verbrauchercharakteristik habe die Gleichung

$$e = e(J). \tag{2}$$

Da weder Selbstinduktion noch Kapazität vorhanden sein soll, muß stets

$$e = E \tag{3}$$

sein. Zunächst sei Gleichgewicht vorhanden; nun verursache ein Zufall eine sehr kleine Stromzunahme J_1; diese hat nach Gleichung (2) eine Änderung der Verbraucherspannung und damit der Generatorspannung zur Folge vom Betrage:

$$E_1 = e_1 = \frac{de}{dJ} \cdot J_1, \tag{4}$$

und diese zieht nach Gleichung (1) eine zweite Stromänderung:

$$J_2 = E_1 \frac{dF}{dE} = J_1 \frac{de}{dJ} \cdot \frac{dF}{dE} = J_1 \frac{e'}{E'} \tag{5}$$

nach sich. J_1 verursacht nun in der gleichen Weise eine dritte Stromänderung: $J_3 = \frac{e'}{E'} \cdot J_2 = \left(\frac{e'}{E'}\right)^2 \cdot J_1$ usf.; die gesamte Stromänderung $J_1 + J_2 + J_3 + ..$ stellt sich so als Summe einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{e'}{E'}$ dar. Die Bedingung der Stabilität ist die, daß diese gesamte Stromände-

Vorläufig können wir also die Frage, ob das Kriterium A auch für einen „praktisch induktionsfreien" Stromkreis, d. h. einen Kreis mit sehr kleiner Selbstinduktion, gilt, noch nicht entscheiden;

---

rung in der Größenordnung der ersten Stromänderung J_1 bleibt, d. h. daß die Reihe konvergiert, also daß der Quotient

$$\frac{e'}{E'} < 1$$

ist. In dem von Wagner betrachteten Spezialfalle, bei dem $E' < 0$ war, kommt daher als Stabilitätsbedingung

$$e' - E' > 0,$$

also unser Kriterium A heraus.

Diese Überlegung ist aber unrichtig. Denn die Änderungen J_1, e_1, E_1, J_2, ..., die in dem Wagnerschen Gedankengange nacheinander auftreten, finden in Wirklichkeit gleichzeitig statt. Jene Überlegung wäre nur dann zulässig, wenn das Resultat unabhängig wäre von der Reihenfolge, in der die Änderungen auftreten. Das ist aber nun keineswegs der Fall, vielmehr ist bei der Wagnerschen Überlegung wesentlich, daß die Stromänderung J_1 zuerst eine Änderung der Verbraucherspannung e_1 zur Folge hat, die dann eine gleiche Änderung E_1 der Generatorspannung nach sich zieht. Denn wenn man die Reihenfolge von e_1 und E_1 umkehrt, so erhält man gerade das umgekehrte Stabilitätskriterium. Die Überlegung würde sich dann folgendermaßen gestalten:

Die erste Stromänderung J_1 hat eine Änderung der Generatorspannung zur Folge vom Betrage:

$$E_1 = J_1 \frac{dE}{dJ} = J_1 E',$$

und diese bewirkt eine gleichgroße Änderung der Verbraucherspannung:

$$e_1 = E_1 = J_1 E'.$$

Die zweite Stromänderung wird nun nach Gleichung (2):

$$J_2 = E_1 \cdot \frac{1}{\frac{de}{dJ}} = E_1 \cdot \frac{1}{e'} = J_1 \frac{E'}{e'} .$$

an erhält also jetzt für die gesamte Stromänderung eine geometrische Reihe mit dem reziproken Quotienten; die Stabilitätsbedingung lautet also jetzt:

$$\frac{E'}{e'} < 1$$

und bei negativem e':

$$e' - E' < 0,$$

also gerade umgekehrt wie oben.

Daß die Wagnerschen Überlegung unzulässig ist, läßt sich auch so einsehen: Falls, wie er voraussetzt, der Stromkreis wirklich absolut kapazitäts- und induktionsfrei ist, und sowohl e wie auch E durch die Gleichungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind, so ist durch Gleichung (1), (2) und (3) der Zustand des Systems vollkommen bestimmt; es ist überhaupt kein anderer Zustand als Gleichgewicht möglich, eine anfängliche Stromzunahme kann gar nicht eintreten. Damit solche Ab-

vielmehr dürfen wir das Kriterium zunächst nur auf solche Stromkreise anwenden, die genügende Selbstinduktion besitzen. Allerdings braucht diese Selbstinduktion nicht elektrodynamischen Ursprungs zu sein; unsere Ableitung des Stabilitätskriteriums setzt nur voraus, daß der Stromkreis eine Eigenschaft besitzt, die bei einer Zustandsänderung ein Nacheilen der Stromänderung J_1 hinter der Gesamtspannungsänderung $E_1 - e_1$ (Gl. 4) bewirkt, und eine solche Eigenschaft kann z. B. auch durch thermische oder ähnliche Vorgänge hervorgebracht werden („scheinbare Selbstinduktion", s. unten § 2, B; vgl. auch die am Schluß von § 6 zusammengestellten Bedingungen für die Gültigkeit des Kriteriums A).

Die Stabilitätsbetrachtung läßt sich ohne Schwierigkeit ausdehnen auf den allgemeineren Fall, daß mehrere Generatoren und mehrere Verbraucher in Reihe geschaltet sind. Sind die Charakteristiken der Generatoren $E_1(J)$, $E_2(J), \ldots$, die der Verbraucher $e_1(J)$, $e_2(J), \ldots$, so läßt sich das System so auffassen, als ob es bestände aus einem Generator mit der Charakteristik:

$$E(J) = E_1(J) + E_2(J) + \cdots$$

und einem Verbraucher mit der Charakteristik:

$$e(J) = e_1(J) + e_2(J) + \cdots$$

(Hintereinanderschaltung der Charakteristiken [1]).

Dann läßt sich Kriterium A anwenden; man erhält die Stabilitätsbedingung:

$$e_1'(J_0) + e_2'(J_0) + \cdots - E_1'(J_0) - E_2'(J_0) - \cdots > 0. \qquad (8)$$

weichungen vom Gleichgewichte möglich sind, muß vielmehr die Gleichung des Stromkreises eine Differentialgleichung sein, die Glieder mit $\frac{dJ}{dt}$ oder $\frac{dE}{dt}$ enthält; und da solche Glieder sich formal stets als von Selbstinduktionen oder Kapazitäten herrührend ansehen lassen, können wir sagen: Damit Abweichungen vom Gleichgewicht überhaupt möglich sind, damit also die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichtes einen Sinn hat, muß der Stromkreis Kapazität oder Selbstinduktion besitzen. Physikalisch ist das zwar insofern belanglos, als jeder Leiter sowohl Selbstinduktion als auch Kapazität besitzt; die letzte Überlegung zeigt aber, daß das Vorhandensein dieser Eigenschaften wesentlich für die Stabilitätsbetrachtung ist, und daß deshalb bei Ableitung der Stabilitätsbedingungen Kapazität oder Selbstinduktion unbedingt berücksichtigt werden müssen.

1) H. Th. Simon, l. c., S. 298.

Zur graphischen Untersuchung der Stabilität sind die beiden Gesamtcharakteristiken $E(J)$ und $e(J)$ zu zeichnen und auf sie die geometrische Form des Kriteriums A anzuwenden. Man kann dann auch einen oder mehrere der Verbraucher zum Generator (oder umgekehrt einige der Generatoren zum Verbraucher) hinzurechnen, so daß die Generatorcharakteristik die Gleichung erhält:

$$E^*(J) = E_1(J) + E_2(J) + \cdots - e_1(J)$$

und die Verbrauchercharakteristik:

$$e^*(J) = e_2(J) + \cdots.$$

Man sieht ohne weiteres, daß die Anwendung des Kriteriums A auf diese neuen Charakteristiken analytisch zum selben Resultat führt (Gl. 8) wie bei den Charakteristiken $E(J)$ und $e(J)$, die Charakteristiken $E^*(J)$ und $e^*(J)$ sind also für die Stabilitätsbetrachtung den Kurven $E(J)$ und $e(J)$ vollkommen gleichwertig; bei der graphischen Methode wird man dasjenige Charakteristikenpaar wählen, das sich am leichtesten zeichnen läßt (siehe z. B. § 2, Beispiel B und C).

§ 2. Anwendungen des Kriteriums A.

A. Konstante Batterie, geschlossen durch konstanten Widerstand. (Siehe Einleitung zu § 1.) Die Generatorcharakteristik hat in diesem Falle die Gleichung:

$$E = E_0;$$

sie ist eine zur Abszissenachse parallele Gerade (Fig. 3); die Verbrauchercharakteristik (Gleichung: $e = JW$) ist eine durch den Ursprung O gehende Gerade. Daher ist:

$$e' - E' = W > 0.$$

Kriterium A ist also erfüllt; ebenso folgt aus dem Diagramm Fig. 3 Stabilität.

B. Gasstrecke mit fallender Charakteristik. (Der von Kaufmann behandelte Fall.) Eine konstante Batterie von der EMK. E_0 speist durch einen konstanten Widerstand W eine leitende Gasstrecke, deren Charakteristik die Gleichung hat:

$$e = e(J). \tag{1}$$

Es ist hier zweckmäßig, den Widerstand W mit zum Generator

zu rechnen, dann wird die Charakteristik des Verbrauchers identisch mit der der Gasstrecke (Gl. 1), und die des Generators:

$$E(J) = E_0 - JW. \tag{2}$$

Letztere wird dargestellt durch eine gerade Linie (Fig. 4), welche die Ordinatenachse im Punkte $E = E_0$ schneidet und unter einem solchen Winkel α gegen die Abszissenachse geneigt ist, daß

$$\operatorname{tg}\alpha = -W$$

ist. Anwendung des Kriteriums A ergibt als Stabilitätsbedingung in analytischer Form:

$$e'(J_0) + W > 0, \tag{3}$$

in geometrischer Form:

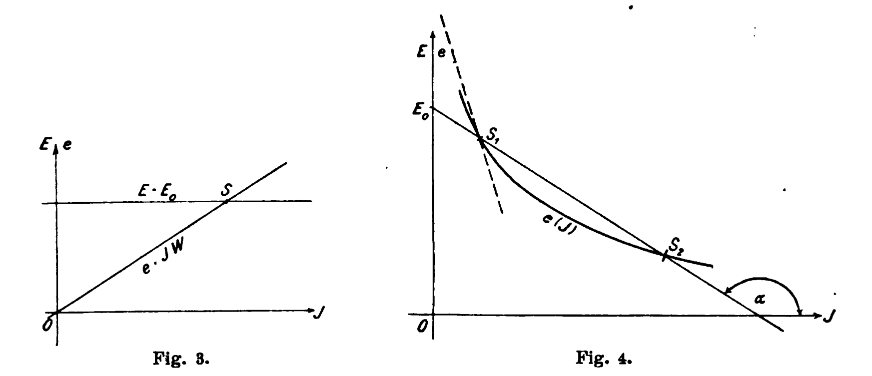


Fig. 3. Fig. 4.

Die Charakteristik der Gasstrecke muß entweder ansteigen oder weniger stark abfallen als die „Widerstandslinie" $E(J) = E_0 - JW$ (1. Kaufmannsches Stabilitätskriterium).

Hier ist also Labilität möglich, wenn die Charakteristik der Gasstrecke abfällt; in diesem Falle ist zur Erzielung eines stabilen Zustandes ein genügend großer Vorschaltwiderstand nötig, für dessen Betrag Gleichung (3) die untere Grenze angibt.

In Fig. 4 ist daher von den beiden gezeichneten Schnittpunkten S_1 und S_2 nur S_2 stabil; S_1 ist labil und kann nicht realisiert werden. Dieser Punkt der Gasstrecken-Charakteristik kann nur erhalten werden, wenn man einen genügend hohen Vorschaltwiderstand bei entsprechend hoher Spannung verwendet (gestrichelte Widerstandslinie).

Diese Betrachtungen sind auch dann anwendbar, wenn der Kreis keine merkliche elektrodynamische Selbstinduktion besitzt; das liegt an einer besonderen Eigenschaft der Gasstrecken, die man nach Simon als Hysteresis bezeichnet. Bei einer Änderung des Betriebszustandes wird nämlich der dem neuen Zustande entsprechende Leitfähigkeitswert der Gasstrecke nicht momentan erreicht, sondern erst nach einer gewissen Zeit, bis nämlich Temperatur und Ionisationszustand die den neuen Bedingungen entsprechenden Werte angenommen haben. Daher wächst bei Erhöhung der Batteriespannung zwar der Strom, bleibt aber zunächst noch kleiner als der stationäre Wert; erst in dem Maße, wie durch den erhöhten Strom Temperatur und Ionisation und damit die Leitfähigkeit der Strombahn zunehmen, wächst der Strom weiter. Der zeitliche Stromverlauf ist daher annähernd so, als ob in die Gasstrecke eine Selbstinduktion eingeschaltet wäre[1]). Simon, der die Hysteresis speziell beim Lichtbogen studiert hat, und Barkhausen haben ebenfalls darauf hingewiesen, daß die Lichtbogenhysteresis wie eine in den Stromkreis eingeschaltete Selbstinduktion wirkt. Eine ähnliche Überlegung hat auch Kaufmann in der erwähnten grundlegenden Arbeit angestellt; er führt die Energie $A(J)$ ein, die in der Gasstrecke bei dem dem Strome J entsprechenden Gleichgewichtszustande in Form von Wärme oder Ionisation vorhanden ist; bei einer Stromänderung müssen die elektrischen Kräfte eine der Änderung von A entsprechende zusätzliche Arbeit $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial J}\frac{dJ}{dt}$ (Umwandlungsarbeit) leisten; dementsprechend muß in der Gleichung der elektromotorischen Kräfte ein Zusatzglied $\frac{1}{J}\frac{\partial A}{\partial J}\frac{dJ}{dt}$, nämlich die dieser Leistung entsprechende elektromotorische Gegenkraft, auftreten; da diese proportional mit $\frac{dJ}{dt}$ ist, läßt sich der Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{J}\frac{\partial A}{\partial J}$ als scheinbare Selbstinduktion auffassen (Hysteresisselbstinduktion). Wie auf S. 9 auseinandergesetzt, kann diese scheinbare Selbstinduktion beim Kriterium A die Rolle der wirklichen vertreten.

1) Das gilt aber nur dann, wenn die Leitfähigkeit der Strombahn mit zunehmendem Strome zunimmt, wenn also die Charakteristik der Gasstrecke weniger steil ansteigt als die eines konstanten Widerstandes (vgl. auch § 6).

Dieser Umstand ist namentlich deshalb wichtig, weil er die Übertragung der Stabilitätsbetrachtung auf Wechselstromkreise erlaubt. Die „Hysteresis-Selbstinduktion" hat nämlich auch bei Wechselstrom die Eigenschaft, zu bewirken, daß nach einer Änderung der effektiven Spannung der effektive Strom nicht momentan, sondern erst allmählich seinen definitiven Wert erreicht. Denn die für die Leitfähigkeit der Gasstrecke maßgebenden Faktoren, Temperatur und Ionisation, machen die schnellen periodischen Stromschwankungen nicht vollständig mit, sondern pendeln um einen Mittelwert; und dieser Mittelwert, der für die mittlere Leitfähigkeit der Gasstrecke maßgebend ist, hängt vom Effektivwert des Stromes und der Spannung ab, jedoch so, daß er nach einer Zustandsänderung seinen definitiven Wert erst allmählich erreicht. Man kann auch hier die Kaufmannsche quantitative Überlegung anwenden: Ist $A(\bar{J})$ die der mittleren Ionisation und Temperatur entsprechende in der Gasstrecke aufgespeicherte Energie, so müssen bei einer Änderung des Effektivstroms $\bar{J}$ die elektrischen Kräfte eine der Änderung von A entsprechende zusätzliche Arbeit $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \bar{J}} \frac{d\bar{J}}{dt}$ leisten; dem muß eine elektromotorische Gegenkraft $\frac{1}{\bar{J}} \frac{\partial A}{\partial \bar{J}} \frac{d\bar{J}}{dt}$ (natürlich hier eine Wechselspannung) entsprechen. Wenn wir daher eine Wechselstromcharakteristik der Gasstrecke in der Weise zeichnen, daß wir die Effektivspannung als Funktion des Effektivstromes auftragen, so können wir aus ihr auf die Stabilität des Zustandes nach denselben Regeln wie bei Gleichstrom schließen. Nur ist diese Wechselstromcharakteristik nicht etwas so genau Definiertes wie die Gleichstromcharakteristik, weil jene auch von der Kurvenform des Wechselstromes abhängt; man wird daher bei derselben Gasstrecke verschiedene Charakteristiken erhalten, je nachdem man diese mit hoher Generatorspannung und großem Widerstande oder mit niedriger Generatorspannung und kleinem Widerstande aufnimmt. Erst wenn die Frequenz des Wechselstromes so groß ist, daß innerhalb einer Periode die Leitfähigkeit der Strombahn sich nicht merklich ändert, kann man von einer wohldefinierten, von den Versuchsbedingungen unabhängigen Wechselstromcharakteristik sprechen; sie stimmt dann mit der Gleichstromcharakteristik überein. In allen anderen Fällen ist der Betrachtung

die den jeweiligen Betriebsbedingungen entsprechende Charakteristik zugrunde zu legen.

Das Beispiel der Gasstrecke ist für die Elektrotechnik wichtig, weil der elektrische **Lichtbogen** eine solche Gasstrecke mit abfallender Charakteristik bildet. Die **abfallende Charakteristik** ist der Grund, weshalb ein Lichtbogen nur mit Vorschaltwiderstand brennt; für jeden Punkt der Charakteristik gibt es laut Bedingung (3) eine untere Grenze des Vorschaltwiderstandes. Da durch einen Punkt der Charakteristik und den Vorschaltwiderstand W auch die Batteriespannung bestimmt ist, gibt es zu jedem Punkte der Charakteristik eine untere Grenze der Batteriespannung E_0, bei der noch gerade ein stabiler Betriebszustand möglich ist. Graphisch findet man diese Grenzspannung (Fig. 5), indem man in dem gegebenen Punkt P an die Charakteristik eine Tangente legt; diese schneidet von der Ordinatenachse ein Stück ab, das gleich der gesuchten Grenzspannung ist. Aus der Konstruktion geht hervor, daß die Grenzspannung um so größer ist, je kleiner der Lichtbogenstrom und je größer die Lichtbogenspannung ist.

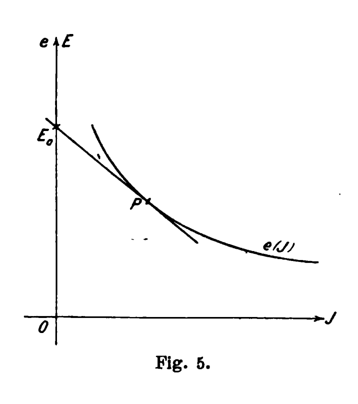


Fig. 5.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den technischen Bogenlampen mit Selbstregulierung[1]. Das Regulierwerk stellt entweder konstanten Strom (Reihenschlußlampe) oder konstante Spannung (Nebenschlußlampe) oder ein konstantes Verhältnis zwischen Strom und Spannung (Differentiallampe) her, so daß die Charakteristik der Lampe entweder eine horizontale oder eine vertikale oder eine durch den Nullpunkt gehende schräge Gerade ist. Man darf aber der Stabilitätsbetrachtung nicht diese „statischen“ Charakteristiken zugrunde legen, weil das Regulierwerk wegen der trägen Masse der zu bewegenden Teile nicht momentan nachregulieren kann. Die Zeit, die das Regulierwerk zur Einstellung braucht, ist im allgemeinen wesentlich größer als die Zeiten, innerhalb deren die elektrischen Veränderungen vor sich gehen; daher können wir in

1) Siehe z. B. G. **Brion**, Leitfaden zum elektrotechnischen Praktikum. Leipzig 1910. S. 395.

erster Annäherung annehmen, daß während der Zeit, innerhalb deren eine der hier betrachteten elektrischen Störungen abläuft, die Bogenlänge konstant bleibt; dann verlaufen Strom und Spannung längs der normalen Lichtbogencharakteristik (wie man sie bei konstanter Bogenlänge erhält), und das Regulierwerk hat auf die Stabilitätsbedingung keinen Einfluß.

Daß allerdings ein genügend schnell reagierendes Regelwerk doch eine Verbesserung der Stabilitätsverhältnisse ergibt, beweisen die im letzten Jahrzehnt in Aufnahme gekommenen sog. „Lampen für Dreierschaltung", die ohne besonderen Vorschaltwiderstand[1]) betrieben werden und daher bei 35 Volt Lampenspannung zu dreien hintereinander an 110 Volt angeschlossen werden können; hier kommt allerdings noch hinzu, daß bei den in der Technik stets verwendeten Dochtkohlen die Bogencharakteristik bei den praktisch verwendeten Stromstärken nur wenig oder überhaupt nicht abfällt, namentlich bei kürzeren Bögen, so daß der Zustand auch ohne Regelwerk schwach stabil wäre.

Im allgemeinen können wir jedenfalls sagen, daß ein selbsttätiges Regelwerk das Stabilitätskriterium nicht nennenswert ändert. Es ist deshalb auch bei einer selbstregulierenden Bogenlampe ein stabiler Betrieb nur möglich, wenn ihr ein genügend großer Widerstand vorgeschaltet wird.

Der Elektrotechniker nennt diesen Widerstand gewöhnlich „Beruhigungswiderstand". Dieser Name erklärt sich aus der Art, wie sich die automatischen Bogenlampen verhalten, wenn das Stabilitätskriterium nicht erfüllt ist. Wir wollen uns überlegen, was dann eintritt. Dazu denken wir uns für einen Augenblick einen labilen Gleichgewichtszustand, wie er etwa in Fig. 4 dem Schnittpunkte S_1 von Bogencharakteristik und Widerstandsgeraden entspricht, realisiert, der entsprechende Wert des Stromes sei J_0. Bei der geringsten Störung des labilen Gleichgewichts beginnt der Strom sich im einen oder anderen Sinne zu ändern, z. B. zu wachsen. Wäre kein Regelwerk vorhanden, so würde dieses Anwachsen so lange dauern, bis der nächste stabile Schnittpunkt S_2 von Charakteristik und Widerstandsgeraden erreicht wäre. Das Regelwerk — wir wollen die Betrachtung auf eine Reihenschlußlampe beschränken — ändert jedoch das Verhalten des Bogens

1) Einen kleinen Vorschaltwiderstand bilden die Zuleitungen, für die man einen Spannungsabfall von 5 Volt bei 3 Lampen rechnet.

vollständig, weil eine Stromstärke, die größer ist als der Gleichgewichtsstrom J_0, auf den das Werk eingestellt ist, gar nicht dauernd existieren kann. Vielmehr werden jetzt, sobald der Strom zu wachsen beginnt, die Kohlen auseinander gezogen, dadurch erhält der Bogen eine höher liegende Charakteristik, die Bogenspannung steigt. Zunächst wächst aber der Strom noch weiter, so lange, bis die Bogenspannung größer geworden ist, als die „Generatorspannung“ [1]) $E_0 - JW$ (das tritt spätestens dann ein, wenn die ganze Bogencharakteristik oberhalb der Widerstandslinie liegt). Von nun an muß der Strom J abnehmen; da aber noch immer $J > J_0$ ist, werden die Kohlen noch immer weiter voneinander entfernt, so lange, bis $J = J_0$ geworden ist. Da aber die Bogenlänge jetzt viel größer ist, als dem (labilen) Gleichgewichtspunkte S_1 entspricht, ist die Bogenspannung erheblich größer als die „Generatorspannung“ $E_0 - JW$, der Strom muß daher noch weiter abnehmen, also kleiner als J_0 werden. Nun tritt die umgekehrte Bewegung des Reguliermechanismus ein: die Bogenlänge und damit die Bogenspannung wird verkleinert, schließlich wird die Bogenspannung kleiner als die Generatorspannung (spätestens bei Berührung der Kohlen), der Strom steigt wieder, erreicht den Gleichgewichtswert J_0 und der ganze Vorgang beginnt von neuem. Labilität des Gleichgewichts äußert sich also bei einer selbstregulierenden Bogenlampe dadurch, daß das Regelwerk überhaupt nicht zur Ruhe kommt, sondern (meist heftige) Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt; die Lampe verhält sich wie ein Wagnerscher Hammer. Die Schwingungen lassen sich nur beseitigen durch Beseitigung der Labilität, d. h. durch Vergrößerung des Vorschaltwiderstandes; so erklärt sich der Ausdruck „Beruhigungswiderstand“. Dieser Name trifft insofern nicht den Kern der Sache, als das Flackern des Bogens erst eine sekundäre Erscheinung, nämlich eine Folge der Labilität ist; besser würde der Ausdruck „Stabilisierungswiderstand“ sein.

Das von uns qualitativ diskutierte Verhalten der Bogenlampe mit Selbstregulierung läßt sich quantitativ verfolgen, wenn man die Bewegungsgleichung des Reguliermechanismus aufstellt; diese ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung und führt in Verbindung mit der Differentialgleichung des elektrischen Stromes auf eine Differentialgleichung 3. Ordnung, deren Integral tatsächlich eine

---

1) Im Sinne der Gleichung (2), S. 11.

Schwingung ist, deren Amplitude unter Umständen konstant ist oder dauernd zunimmt. Die Aufstellung und Diskussion dieser Differentialgleichung, die nach der im § 4 erläuterten Methode zu erfolgen hätte, erübrigt sich, weil durch die obige qualitative Betrachtung das praktische Verhalten der Bogenlampe genügend klargestellt ist.

Es gibt in der Technik auch Fälle, in denen Bogenlampen ohne Vorschaltwiderstand brennen, nämlich dann, wenn eine Reihe von hintereinander geschalteten Bogenlampen von einer besonderen Maschine (Bogenlichtmaschine) gespeist werden. Auch dann muß das Stabilitätskriterium A erfüllt sein:

$$e'(J_0) - E'(J_0) > 0,$$

d. h. es muß die Charakteristik der Dynamomaschine stärker abfallen als die Gesamtcharakteristik der hintereinander geschalteten Bogenlampen. Tatsächlich haben die „Bogenlichtmaschinen" (meistens Hauptstrommaschinen mit offener Ankerwicklung) eine sehr stark abfallende Charakteristik, die dadurch erreicht ist, daß starke Ankerrückwirkung vorhanden ist. Es scheint allerdings, daß man den Maschinen diese steil abfallende Charakteristik nicht zur Erzielung eines stabilen Zustandes gegeben hat, sondern deshalb, damit durch Ausschalten, d. h. Kurzschließen einer von den hintereinander geschalteten Lampen der Strom sich nicht erheblich ändern sollte.

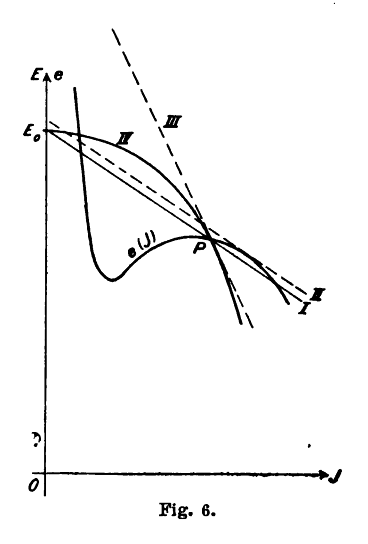


Fig. 6.

C. Die Nernstlampe. Fig. 6 zeigt die Charakteristik der Nernstlampe[1]). Der dem normalen Betriebe entsprechende Punkt P liegt dort, wo die Charakteristik schwach abzufallen beginnt; ohne Vorschaltwiderstand würde daher der Zustand labil sein. Würde man die Lampe mit einem kleinen Vorschaltwiderstande betreiben, entsprechend der Widerstandslinie I (Fig. 6), so wäre der Zustand in P

1) Nach H. Th. Simon, l. c., S. 300.

zwar stabil; die Figur lehrt aber, daß schon eine geringe Steigerung der Netzspannung E_0 genügt, um die Widerstandslinie I so weit nach oben zu verschieben, daß sie die Charakteristik des Nernststiftes berührt (punktierte Lage, II); dann ist das Gleichgewicht indifferent und würde bei der geringsten Stromsteigerung labil werden. Im Interesse der Betriebssicherheit wäre daher ein viel größerer Vorschaltwiderstand bei entsprechend höherer Netzspannung notwendig, wie er etwa der Widerstandsgeraden III entsprechen würde. In diesem Widerstande würde aber zu viel Energie vernichtet werden, deshalb verwendet man bei den technischen Nernstlampen Widerstände, die einen möglichst hohen Temperaturkoeffizienten und damit eine sehr steil ansteigende Charakteristik haben, nämlich Eisendrahtwiderstände. Die ausgezogene Kurve in Fig. 7 zeigt die Charakteristik eines solchen, wie er für Nernstlampen für 110 Volt Netzspannung (90 Volt Stiftspannung) und 1 Ampere Stromstärke verwendet wird; bei normaler Netzspannung beträgt sein Widerstand etwa 20 Ω (Punkt P), während an dieser Stelle der Anstieg e' der Charakteristik ca. 120 Ω beträgt. Im Diagramm Fig. 6 hat mit einem solchen Widerstande die Generatorcharakteristik den Verlauf, den Kurve IV darstellt; man sieht, daß so gleichzeitig gute Stabilität und geringer Energieverbrauch im Vorschaltwiderstande erreicht wird. Außerdem haben diese Vorschaltwiderstände noch den Vorteil, daß eine Schwankung der Netzspannung, d. h. eine Parallelverschiebung von Kurve IV nach oben oder unten, nur eine sehr geringe Stromschwankung und damit geringe Lichtschwankung hervorruft. Auch hier ist, ebenso wie beim Lichtbogen, das Stabilitätskriterium nicht gebunden an das Vorhandensein von elektrodynamischer Selbstinduktion, denn der Nernststift ist ein Ohmscher Widerstand, dessen Betrag von der Temperatur abhängt; wegen der Wärmekapazität des Stiftes folgt die Temperatur den Stromänderungen nicht momentan, daher lassen sich die bei Behandlung der Gasstrecken angestellten Überlegungen (S. 12/13) ohne weiteres auf den Nernststift übertragen. Die Wärmekapazität des Nernststiftes ist also günstig

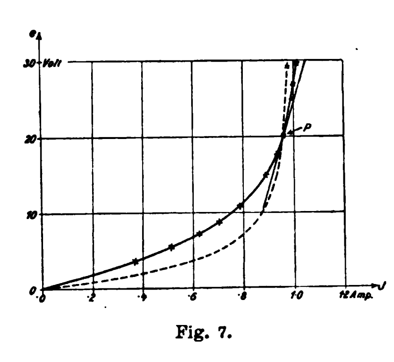


Fig. 7.

für die Stabilität. Ungünstig wirkt dagegen die Wärmekapazität des Vorschaltwiderstandes; je größer sie ist, desto weniger wird sich in den ersten Augenblicken nach einer Stromänderung die Temperatur ändern, desto mehr wird sich also der Vorschaltwiderstand in seinem Verhalten einem konstanten Widerstande nähern. Damit unsere Betrachtungen richtig bleiben, muß der Vorschaltwiderstand seinen Gleichgewichtswert mindestens ebenso schnell erreichen wie der Nernststift, d. h. seine Wärmekapazität muß unterhalb einer gewissen Grenze liegen. Deshalb gibt man dem Vorschaltwiderstand eine möglichst geringe Masse oder, was dasselbe ist, man wendet möglichst hohe spezifische Strombelastung an; diese wird ermöglicht durch besonders gute Kühlung, die man durch Einbettung des Widerstandsdrahtes in das die Wärme gut leitende Wasserstoffgas erreicht; damit die Wärmekapazität des Gasvolumens möglichst klein ist, wird der Gasdruck so weit erniedrigt, als es ohne Beeinträchtigung des Wärmeleitvermögens möglich ist (ca. 2 cm *Hg* [1])).

D. Der Hauptstromgenerator. Der Hauptstromgenerator ist be-

1) Das hohe Wärmeleitvermögen des Wasserstoffs bringt es mit sich, daß die Temperatur und damit der Widerstand des Eisendrahtes auch von der Temperatur der Umgebung abhängt, vor allem von der des Glasgefäßes, in das der Draht eingeschlossen ist; diese Temperatur erreicht wegen der hohen Wärmekapazität des Glasgefäßes nur langsam den stationären Wert. Bei Aufnahme der Charakteristik macht sich das dadurch bemerkbar, daß nach einer Zustandsänderung der Widerstand des Drahtes sich zunächst zwar schnell ändert, dann folgt aber noch eine Zeit sehr geringer Änderungsgeschwindigkeit des Widerstandes, die von der Temperaturänderung des Glasgefäßes herrührt. Man erhält demnach verschiedene Charakteristiken, je nachdem man die Instrumente nach Ablauf der ersten, schnellen Widerstandsänderung abliest, oder mit der Ablesung wartet, bis auch die zweite, langsame Widerstandsänderung beendigt ist. Für die Stabilität kann natürlich nur die nach dem ersten Verfahren erhaltene Charakteristik in Betracht kommen; deshalb wurde bei Aufnahme der Charakteristik Fig. 7 (ausgezogene Kurve) vor jeder Ablesung der normale Betriebszustand ($e = 20$ Volt, $J = 0{,}96$ Amp.) eingestellt und dann der in der Zuleitung liegende Regulierwiderstand schnell geändert; die Ablesung erfolgte, sobald die Änderungsgeschwindigkeit des Stromes klein und nahezu konstant geworden war (nach etwa 1 Sekunde). Die Charakteristik, die ich erhielt, wenn ich vor jeder Ablesung bis zum vollständigen Gleichgewicht wartete — das dauerte immer mehrere Minuten —, ist durch die gestrichelte Kurve in Fig. 7 dargestellt. Sie ist noch steiler als die andere Kurve; das ist vorteilhaft, weil dadurch eine sehr weitgehende Unabhängigkeit des Stromes und der Lichtstärke von der Netzspannung gewährleistet wird.

sonders interessant dadurch, daß er die einzige bekannte Stromquelle mit ansteigender Charakteristik bildet (wenn man von dem Kompoundgenerator, der eine Abart des Hauptstromgenerators ist, absieht).

a) Belastung durch einen konstanten Widerstand.

Fig. 8 [1]) zeigt die Charakteristik des Hauptstromgenerators. Schließt man ihn durch einen so großen Widerstand, daß dessen Charakteristik *I* steiler ist als die des Generators im Nullpunkte *O*, so ist dieser Schnittpunkt nach dem Kriterium *A* stabil, Strom und Spannung bleiben dauernd null. Ist der Betrag des Schließungswiderstandes gleich E' („kritischer Widerstand“, Gerade *II*), so fallen beide Charakteristiken eine größere Strecke zusammen; das Gleichgewicht ist indifferent, bei Stromlosigkeit bleibt die Maschine stromlos, nach einem kurzen Stromimpuls von außen bleibt der einmal angenommene Zustand positiven oder negativen Stromes bestehen. Erst wenn $W < E'$ gemacht wird (Gerade *III*), kann die Maschine sich selbst erregen, weil dann die Stromlosigkeit einem labilen Punkte entspricht; es wird dann entweder der stabile Punkt S_1 oder S_2 erreicht.

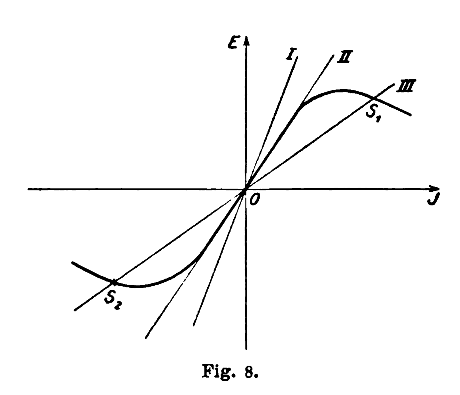


Fig. 8.

Dieselbe Betrachtung gilt für den leer laufenden Nebenschlußgenerator; als Schließungswiderstand ist dabei der Widerstand der Magnetwicklung einschließlich des vorgeschalteten Regulierwiderstandes einzusetzen.

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man, wenn man den Schließungswiderstand *W* des Generators unverändert läßt und die Umdrehungszahl variiert; dann behält die Widerstandslinie ihre Lage, während die Generatorcharakteristik steiler oder flacher wird. Hier kann man, ebenso wie wir oben einen „kritischen Widerstand“ eingeführt haben, von einer „kritischen Umdrehungszahl“ [2])

1) H. Barkhausen, Verh. d. D. Physik. Ges. **11**, 267—272, 1909.

2) F. Auerbach, Wied. Ann. **34**, 172—179, 1888; derselbe Elektrot. ZS. **9**, 901—908, 1888; Referat in Winkelmanns Handbuch, 5. Aufl. 1908, S. 737. (Des Coudres.)

der Maschine sprechen: damit Selbsterregung eintritt, muß die Umdrehungszahl mindestens so groß sein, daß der Anstieg E' der Generatorcharakteristik in der Nähe des Stromes null gleich dem Betrage des Schließungswiderstandes ist. Dies ist namentlich wichtig für Nebenschlußmaschinen, bei denen ja der Schließungswiderstand W (nämlich der Widerstand der Feldwicklung) konstant ist.

b) Belastung durch eine aufzuladende Akkumulatorenbatterie[1]).

Die Batterie habe die Spannung e_0; wegen ihres inneren Widerstandes ist ihre Charakteristik eine geneigte Gerade I (Fig. 9), die mit der Generatorcharakteristik 3 Schnittpunkte S_1, S_2, S_3 hat. S_2 ist labil, S_1 und S_3 stabil; S_1 entspricht einer Aufladung, S_3

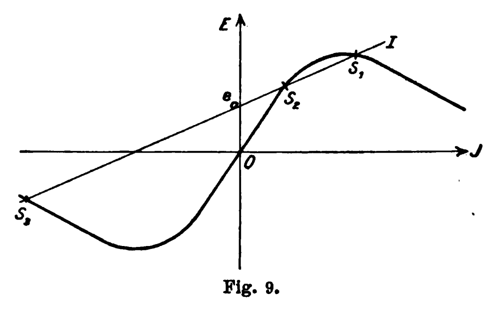


Fig. 9.

einer Entladung der Batterie. Die Figur zeigt, daß Ladung praktisch nur auf dem absteigenden Ast der Generatorcharakteristik möglich ist; aber auch dann kann leicht Labilität eintreten, nämlich dann, wenn entweder die Batteriespannung bei fortschreitender Ladung so weit steigt, oder die Generatorspannung infolge Verringerung der Drehzahl so weit sinkt, daß die Gerade I die Generatorcharakteristik berührt. Dann tritt Labilität ein, der Generator polarisiert sich um und es stellt sich der dem Punkte S_3 entsprechende Gleichgewichtszustand (Entladung der mit dem Generator hintereinander geschalteten und kurzgeschlossenen Batterie) ein. Daher sind Hauptstromgeneratoren zum Laden von Akkumulatoren nicht geeignet. Aus demselben Grunde vermeidet man die Verwendung eines Hauptstromgenerators zu elektrolytischen Zwecken; denn wegen der Zersetzungsspannung hat die Charakte-

1) Hopkinson, Some points in electric lighting, Vorlesung vor der Instit. of Civil Engin., April 1882, abgedr. in Technical Papers, Cambridge 1901, S. 57.

ristik einer elektrolytischen Zelle einen ähnlichen Verlauf wie die Gerade I Fig. 9. auch hier könnte daher leicht Labilität eintreten.

c) Parallelschalten von unbelasteten Hauptstromgeneratoren.

Hier fassen wir am einfachsten den einen Generator als Verbraucher auf, indem wir das Vorzeichen des Stromes umkehren. seine Charakteristik ist dann durch E_{II} in Fig. 10 gegeben. Dann ist im Schnittpunkte O:

$$E_I' > O. \quad E_{II}' < O.$$

also

$$E_{II}' - E_I' < O.$$

Das Kriterium A ist **nicht** erfüllt.

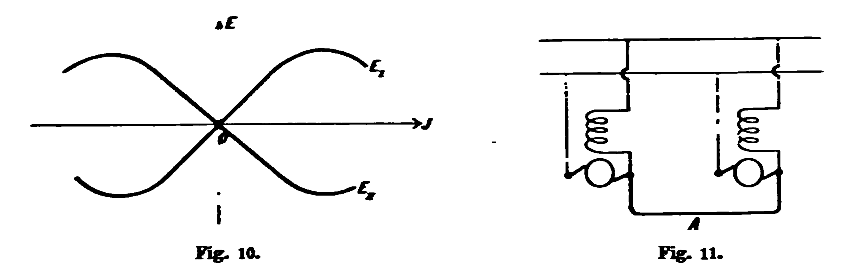


Fig. 10. Fig. 11.

Daher darf man zwei Hauptstromgeneratoren und überhaupt Generatoren mit ansteigender Charakteristik nicht miteinander parallel schalten[1]. Bei Hauptstromgeneratoren ist Parallelschaltung dann möglich, wenn man eine starke Ausgleichsleitung A (Fig. 11) anwendet; diese bewirkt, daß der Strom in beiden Magnetwicklungen genau der gleiche ist; bei gleicher Drehzahl der beiden Generatoren können dann überhaupt keine Verschiedenheiten in den elektromotorischen Kräften mehr auftreten, die beiden Generatoren verhalten sich wie ein einziger.

II. Verzweigte Stromkreise.

§ 3. Parallelschaltung von mehreren Verbrauchern und Generatoren.

Am Schlusse von § 1 hatten wir gesehen, daß man das Kriterium A auch dann anwenden kann, wenn mehrere Verbraucher

1) Vergl. auch § 3B (S. 33).

und mehrere Generatoren in Reihe geschaltet sind, indem man nach dem Prinzip der Hintereinanderschaltung der Charakteristiken die Gesamtcharakteristik der hintereinander geschalteten Verbraucher und ebenso die der Generatoren ermittelt. Anders liegt die Sache, wenn von einem Generator mehrere parallel geschaltete Verbraucher oder ein Verbraucher von mehreren parallel geschalteten Generatoren gespeist werden. Man kann zwar auch hier nach einem einfachen graphischen Verfahren (Prinzip der Parallelschaltung der Charakteristiken[1]) die Gesamtcharakteristik der parallel geschalteten Verbraucher und ebenso die der Generatoren ermitteln; aber auf diese Gesamtcharakteristiken läßt sich das Kriterium A nicht anwenden, und zwar deshalb nicht, weil hier nicht mehr die einfache Grundgleichung (3) des § 1 gilt, vielmehr gelten für das System mehrere simultane Differentialgleichungen.

A. Ein Generator speist zwei parallel geschaltete Verbraucher. In dem einfachsten Falle, daß ein Generator mit der Charakteristik $E\ (J)$ zwei parallel geschaltete Verbraucher mit den Charakteristiken $e_{\mathrm{I}}\ (J_{\mathrm{I}})$ und $e_{\mathrm{II}}\ (J_{\mathrm{II}})$ und den Selbstinduktionen L_{I} und L_{II} speist, gelten zwei Gleichungen

$$E(J_{\mathrm{I}}+J_{\mathrm{II}})=e_{\mathrm{I}}(J_{\mathrm{I}})+L_{\mathrm{I}}\frac{dJ_{\mathrm{I}}}{dt} \tag{1}$$

und

$$E(J_{\mathrm{I}}+J_{\mathrm{II}})=e_{\mathrm{II}}(J_{\mathrm{II}})+L_{\mathrm{II}}\frac{dJ_{\mathrm{II}}}{dt} \tag{2}$$

(denn der Generatorstrom J ist jetzt gleich der Summe der beiden Verbraucherströme $J_{\mathrm{I}}+J_{\mathrm{II}}$).

Das sind die der Gleichung (3) des § 1 entsprechenden Gleichungen. Sie enthalten als Spezialfall den des Gleichgewichtes $\left(\frac{d}{dt}=0\right)$; für die entsprechenden Werte der Variablen (Index 0) folgt aus ihnen

$$E_0=E(J_{\mathrm{I}_0}+J_{\mathrm{II}_0})=e_{\mathrm{I}_0}=e_{\mathrm{I}}(J_{\mathrm{I}_0}) \tag{1a}$$

$$E_0=E(J_{\mathrm{I}_0}+J_{\mathrm{II}_0})=e_{\mathrm{II}_0}=e_{\mathrm{II}}(J_{\mathrm{II}_0}). \tag{2a}$$

Um daraus die Gleichgewichtswerte der Variablen wirklich zu finden, wird man im allgemeinen wieder graphisch vorgehen. Am einfachsten verfährt man so, daß man zunächst die Gesamtcharakteristik der beiden parallelgeschalteten Verbraucher

$$e=e\,(J_{\mathrm{I}}+J_{\mathrm{II}})$$

---

1) H. Th. Simon, l. c., S. 298.

graphisch ermittelt; dazu zeichnet man die beiden Einzelcharakteristiken $e_{\mathrm{I}}\,(J_{\mathrm{I}})$ und $e_{\mathrm{II}}\,(J_{\mathrm{II}})$ in das gleiche Koordinatensystem (Fig. 12), die Gesamtcharakteristik ergibt sich dann durch Addition der zu gleichen Ordinaten gehörigen Abszissen. Der Schnittpunkt S der so erhaltenen Gesamtcharakteristik der Verbraucher mit der Generatorcharakteristik $E(J)$ gibt dann den dem Gleichgewicht entsprechenden Gesamtstrom $J_0 = J_{\mathrm{I}_0} + J_{\mathrm{II}_0}$ und die Gleichgewichtsspannung $E_0 = e_{\mathrm{I}_0} = e_{\mathrm{II}_0}$. Zieht man noch durch S eine Parallele zur Abszissenachse, so schneidet diese die Einzelcharakteristiken e_{I} und e_{II} in den den Betriebszustand der Einzelverbraucher angebenden Punkten S_{I} und S_{II}, deren Abszissen die Einzelströme J_{I_0} und J_{II_0} sind.

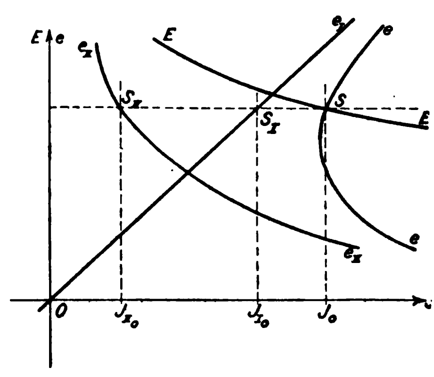


Fig. 12.

Zur Untersuchung der Stabilität dieses Gleichgewichtszustands ist nun dasselbe Verfahren anzuwenden wie in § 1: In derselben Weise wie dort erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) für den Verlauf kleiner Abweichungen (Index 1) der Variablen von ihren Gleichgewichtswerten die der Gleichung (4) des § 1 entsprechenden Gleichungen

$$E_1 = e_{\mathrm{I}_1} + L_{\mathrm{I}} \frac{d J_{\mathrm{I}_1}}{dt} \tag{3}$$

$$E_1 = e_{\mathrm{II}_1} + L_{\mathrm{II}} \frac{d J_{\mathrm{II}_1}}{dt}. \tag{4}$$

Außerdem ergeben sich aus den Charakteristiken (Taylorscher Satz) zwischen den Abweichungen vom Gleichgewicht die den Gleichungen (5) und (6) des § 1 entsprechenden Beziehungen

$$E_1 = J_1\, E'\,(J_0) = (J_{\mathrm{I}_1} + J_{\mathrm{II}_1})\, E'\,(J_0) \tag{5}$$

$$e_{\mathrm{I}_1} = J_{\mathrm{I}_1}\, e_{\mathrm{I}}'\,(J_{\mathrm{I}_0}) \tag{6}$$

$$e_{\mathrm{II}_1} = J_{\mathrm{II}_1}\, e_{\mathrm{II}}'\,(J_{\mathrm{II}_0}) \tag{7}$$

(hier sind wieder, wie üblich, $E'\,(J_0)$, $e_{\mathrm{I}}'\,(J_{\mathrm{I}_0})$, $e_{\mathrm{II}}'\,(J_{\mathrm{II}_0})$ oder noch kürzer E', e_{I}', e_{II}' zur Abkürzung gesetzt für die dem Gleichge-

wichtszustande entsprechenden Werte der Differentialquotienten $\frac{dE}{dJ}, \frac{de_{\text{I}}}{dJ_{\text{I}}}, \frac{de_{\text{II}}}{dJ_{\text{II}}}\Big)$.

Die Gleichungen (3) bis (7) bestimmen den zeitlichen Verlauf der 5 Variablen; eliminiert man aus ihnen 4 der Variablen, so erhält man für die übrig bleibende 5te die der Gleichung (7) in § 1 entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left\{\frac{e_{\text{I}}'-E'}{L_{\text{I}}}+\frac{e_{\text{II}}'-E'}{L_{\text{II}}}\right\}\frac{dx}{dt}+\frac{e_{\text{I}}'\,e_{\text{II}}'-E'\,(e_{\text{I}}'+e_{\text{II}}')}{L_{\text{I}}\,L_{\text{II}}}\,x=0, \tag{8}$$

worin x irgendeine der 5 Variablen E_1, e_{I_1}, e_{II_1}, J_{I_1}, J_{II_1}, also die Abweichung einer der Spannungen oder Ströme von ihrem Gleichgewichtswerte bedeutet.

Gleichung (8) unterscheidet sich von der ihr entsprechenden Gleichung (7) des § 1 vor allem dadurch, daß sie von der zweiten Ordnung ist. Wir können daher diesmal aus ihr direkt noch nichts über den Ablauf einer Abweichung x vom Gleichgewichte aussagen, weil $\frac{dx}{dt}$ nicht nur von x, sondern auch von $\frac{d^2x}{dt^2}$ abhängt, vielmehr müssen wir sie integrieren.

Die Gleichung ist identisch mit der bekannten Differentialgleichung der freien Schwingungen; man löst sie in bekannter Weise, indem man für x den Ansatz macht

$$x = C\,e^{\alpha t}, \tag{9}$$

worin C und α Konstanten sind. Gleichung (9) in (8) eingesetzt ergibt eine quadratische Gleichung für α

$$\alpha^2 + a_1\,\alpha + a_2 = 0\,, \tag{10}$$

worin a_1 und a_2 Abkürzungen für die Koeffizienten von $\frac{dx}{dt}$ und x in Gleichung (8) sind:

$$a_1 = \frac{e_{\text{I}}'-E'}{L_{\text{I}}}+\frac{e_{\text{II}}'-E'}{L_{\text{II}}} \tag{11}$$

$$a_2 = \frac{e_{\text{I}}'\,e_{\text{II}}'-E'\,(e_{\text{I}}'+e_{\text{II}}')}{L_{\text{I}}\,L_{\text{II}}}. \tag{12}$$

Die Konstante C fällt in Gleichung (10) heraus, kann also willkürlich gewählt werden (Integrationskonstante). Die Wurzeln von Gleichung (10) lauten

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \\ \alpha_2 = \end{array}\right\} \frac{1}{2}\left[-a_1 \pm \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2}\right]. \tag{13}$$

Die allgemeine Lösung von (8) lautet dann

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \tag{14}$$

worin C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind, die von den Anfangsbedingungen, d. h. von Größe und Art der ursprünglichen Störung, abhängen.

Bei komplexem α_1 und α_2, d. h. wenn der Ausdruck unter der Wurzel

$$a_1{}^2 - 4a_2 < 0$$

ist, läßt sich Gleichung (14) in bekannter Weise umformen zu

$$x = e^{\mathfrak{r}t}(A \cos \mathfrak{j}t + B \sin \mathfrak{j}t), \tag{14a}$$

worin $\mathfrak{r}$ den reellen, $\mathfrak{j}$ den imaginären Teil der α und A und B die Integrationskonstanten bedeuten.

Gleichung (14) und (14a) sagen aus, daß nach einer Störung die Variablen x sich entweder nach einem Exponentialgesetze ändern (wenn nämlich die α reell sind) oder daß Schwingungen auftreten (bei komplexem α_1 und α_2), die entweder anschwellen oder abklingen oder konstant sind, je nachdem der reelle Teil der α positiv oder negativ ist oder verschwindet. Stabil ist der Zustand dann und nur dann, wenn jede beliebige Störung mit der Zeit verschwindet, d. h. wenn x bei beliebigen Werten von C_1 und C_2 für $t = \infty$ zu Null wird. Im ersten Falle (wenn α_1 und α_2 reell sind) ist dazu nötig, daß beide α negativ sind, im zweiten Falle (α komplex) muß der reelle Teil $\mathfrak{r}$ der α negativ sein, oder, beide Fälle zusammengefaßt: Der reelle Bestandteil beider α muß negativ sein. Die Bedingung dafür ist:

a) wenn die α reell sind, d. h. wenn

$$a_1{}^2 - 4\,a_2 \gtreqless 0:$$

$$a_1 > 0, \qquad a_2 > 0;$$

b) wenn die α komplex sind, d. h. wenn

$$a_1{}^2 - 4a_2 < 0, \text{ oder } 4a_2 > a_1{}^2 > 0:$$

$$a_1 > 0.$$

Da im Falle b) immer $a_2 > 0$ ist, so ist in beiden Fällen die notwendige und hinreichende Bedingung der Stabilität die, daß

$$a_1 = \frac{e_I' - E'}{L_I} + \frac{e_{II}' - E'}{L_{II}} > 0 \tag{15}$$

und

$$a_2 = \frac{e_I' e_{II}' - E'(e_I' + e_{II}')}{L_I L_{II}} > 0 \tag{16}$$

ist. Wir wollen diese Stabilitätsbedingungen noch etwas umformen. Setzen wir

$$\frac{e_I' - E'}{L_I} = p, \qquad \frac{e_{II}' - E'}{L_{II}} = q, \tag{17}$$

so gehen Gl. (15) und (16) über in

$$p + q > 0, \tag{15a}$$

$$pq - \frac{E'^2}{L_I L_{II}} > 0. \tag{16a}$$

Da L_I und L_{II} und damit $\frac{E'^2}{L_I L_{II}}$ stets positiv sind, lassen sich die beiden letzten Bedingungen nur erfüllen, wenn p und q einzeln größer als Null sind; damit haben wir als notwendige Stabilitätsbedingungen gefunden

$$e_I' - E' > 0, \tag{18}$$

$$e_{II}' - E' > 0: \tag{19}$$

Das Kriterium A muß für beide Verbraucher einzeln erfüllt sein. Bei der Anwendung des Kriteriums A in der geometrischen Form ist zu beachten, daß die Punkte der Charakteristiken, in denen die Anstiege e_I' und E' bzw. e_{II}' und E' zu messen sind, nicht mehr, wie in § 1, die Schnittpunkte der Verbrauchercharakteristiken mit der Generatorcharakteristik, sondern drei getrennt liegende Punkte sind, nämlich die auf den drei Charakteristiken dem Gleichgewichtszustande entsprechenden Punkte S, S_I, S_{II} (Fig. 12); will man daher auf die Stabilität schließen aus der Art, wie sich die beiden betreffenden Charakteristiken schneiden, so muß man eine von ihnen, z. B. die Generatorcharakteristik, so weit parallel zu sich in Richtung der Abszissenachse verschieben, bis Punkt S mit S_I bzw. S_{II} zusammenfällt.

Mit Gleichung (18) und (19) ist auch Gleichung (15) notwendig erfüllt, (16) dagegen nicht; die Gleichungen (18), (19) und (16), welch letztere wir wegen des positiven Nenners einfacher schreiben können:

$$e_I' e_{II}' - E' (e_I' + e_{II}') > 0 \qquad (16b)$$

bilden daher zusammen ebenfalls notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen. Ehe wir zur Diskussion von Gleichung (16b) übergehen, wollen wir noch eine weitere notwendige Stabilitätsbedingung aus diesen 3 Gleichungen ableiten: Addieren wir in (16b) auf beiden Seiten $(e_{II}')^2$, so geht sie über in

$$e_{II}' (e_{II}' + e_I') - E' (e_I' + e_{II}') = (e_{II}' - E') (e_I' + e_{II}') > e_{II}'^2$$

oder, da nach Gleichung (19) $e_{II}' - E'$ positiv ist,

$$e_I' + e_{II}' > \frac{e_{II}'^2}{e_{II}' - E'},$$

und da die rechte Seite positiv ist, a fortiori

$$e_I' + e_{II}' > 0. \qquad (20)$$

Unter Benutzung der Bedingungen (18), (19) und (20) läßt sich Bedingung (16b) auf folgende drei Arten schreiben:

$$\frac{e_I' e_{II}'}{e_I' + e_{II}'} - E' > 0 \qquad (16c)$$

$$e'_I - \frac{E' e_{II}'}{e_{II}' - E'} > 0 \qquad (16d)$$

$$e_{II}' - \frac{E' e_I'}{e_I' - E'} > 0. \qquad (16e)$$

In dieser Form läßt sich Bedingung (16) anschaulich deuten: es ist nämlich der Ausdruck $\frac{e_I' e_{II}'}{e_I' + e_{II}'} = e'$ gleich dem Anstiege der Gesamtcharakteristik der einander parallel geschalteten Verbraucher. Das sieht man am einfachsten, wenn man einmal umgekehrt wie bisher die Ströme J, J_I und J_{II} als Funktionen der Spannungen e, e_I, e_{II} (die hier alle einander gleich sind) auffaßt; dann wird

$$J(e) = J_I(e_I) + J_{II}(e_{II}) = J_I(e) + J_{II}(e),$$

also

$$\frac{dJ}{de} = \frac{dJ_I}{de} + \frac{dJ_{II}}{de} = \frac{dJ_I}{de_I} + \frac{dJ_{II}}{de_{II}},$$

oder, da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)},$$

ist:

$$\frac{1}{e'} = \frac{1}{\left(\frac{de}{dJ}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{de_{\mathrm{I}}}{dJ_{\mathrm{I}}}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{de_{\mathrm{II}}}{dJ_{\mathrm{II}}}\right)} = \frac{1}{e_{\mathrm{I}}'} + \frac{1}{e_{\mathrm{II}}'}$$

oder

$$e' = \frac{e_{\mathrm{I}}' \, e_{\mathrm{II}}'}{e_{\mathrm{I}}' + e_{\mathrm{II}}'}, \tag{21}$$

w. z. b. w.. Damit lautet Gleichung (16c)

$$e'(J_0) - E'(J_0) > 0,$$

d. h. für die Generatorcharakteristik und die Gesamtcharakteristik der Verbraucher muß Kriterium A (§ 1) erfüllt sein.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß die Ausdrücke $\frac{E' e_{\mathrm{I}}'}{e_{\mathrm{I}}' - E'}$ und $\frac{E' e_{\mathrm{II}}'}{e_{\mathrm{II}}' - E'}$, die in den Gleichungen (16d) und (16e) vorkommen, gleich den Anstiegen der Gesamtcharakteristiken E_1 und E_2 sind, die man erhält, wenn man als Generator den ursprünglichen Generator mit parallel geschaltetem Verbraucher I bzw. II betrachtet.

Demnach bedeuten die Bedingungen (16d) und (16e): Wenn man den ursprünglichen Generator mit einem der beiden Verbraucher als einheitlichen Generator ansieht, so gilt für die Gesamtcharakteristik dieses Generators und die des übrig bleibenden Verbrauchers das Kriterium A.

Wenn wir das Kriterium A, ohne seine Anwendbarkeit zu prüfen, hier sinngemäß angewendet hätten, würden wir zwar ebenfalls die Gleichungen (16c—e), aber nicht die Gleichungen (18) bis (20) erhalten haben; die Nichtanwendbarkeit des Kriteriums A zeigt sich bei diesem Resultat darin, daß nach ihm die Bedingungen (16c—e) notwendig und hinreichend sein müßten, während wir sie nur als notwendig gefunden haben; in der Tat lassen sich Werte von E', e_{I}' und e_{II}' angeben, die alle drei Gleichungen (16c—e) befriedigen und trotzdem den von uns als notwendige Stabilitätsbedingungen erkannten Gleichungen (18)—(20) nicht genügen (z. B. $E' = 20$, $e_{\mathrm{I}}' = 5$, $e_{\mathrm{II}}' = -6$).

Zu bemerken ist noch, daß die durch die Differentialgleichung (8) als möglich hingestellten Schwingungen hier nicht auftreten können; denn bildet man den Ausdruck $a_1{}^2 - 4a_2$, der in den Gleichungen (13) unter der Wurzel steht:

$$a_1{}^2 - 4a_2 = (p+q)^2 - 4\left(pq - \frac{E'^2}{L_{\mathrm{I}} L_{\mathrm{II}}}\right) = (p-q)^2 + 4\frac{E'^2}{L_{\mathrm{I}} L_{\mathrm{II}}},$$

so sieht man, daß er als Summe von zwei Quadraten stets positiv ist; die Wurzel ist also stets reell.

Bei der Ableitung der Stabilitätsbedingungen hatten wir den Generator als selbstinduktionsfrei angenommen; lassen wir diese Voraussetzung fallen, so werden unsere Resultate nur unwesentlich geändert; die Differentialgleichung bleibt von der zweiten Ordnung, nur werden die Ausdrücke für die Koeffizienten etwas komplizierter. Die aus der Gleichung gezogenen und noch zu ziehenden Schlüsse werden nicht wesentlich geändert, wir verzichten daher auf die Wiedergabe der einfachen Rechnung.

Folgerungen:

1. Aus Gleichung (20) folgt sofort ein Satz, der das Analogon bildet zu dem in § 2, D, c abgeleiteten Satze (daß zwei Generatoren mit ansteigenden Charakteristiken einander nicht parallel geschaltet werden dürfen):

Zwei Verbraucher mit abfallenden Charakteristiken dürfen nicht einander parallel geschaltet werden. Daher können niemals zwei Bogenlampen parallel zueinander mit gemeinsamem Vorschaltwiderstande betrieben werden, vielmehr erfordert jede Lampe bzw. jede Lampenserie ihren besonderen Widerstand; aus demselben Grunde muß bei Mehrfach-Nernstbrennern jeder Stift einen besonderen Vorschaltwiderstand erhalten. Hierher gehört nach einer Vermutung von La Rosa[1]) auch eine Erscheinung, die auftritt, wenn ein dickes Kohlestäbchen durch einen durchgeleiteten Strom erhitzt wird. Kohle hat einen negativen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes; bei starker Erhitzung kann daher die Charakteristik des Kohlestäbchens abfallend werden; denkt man sich das Stäbchen durch Längsschnitte in mehrere Teilstäbchen zerlegt, so verhalten sich diese, abgesehen von dem Temperaturausgleich durch Wärmeleitung, wie parallel geschaltete Widerstände, und es kann unter Umständen Labilität eintreten. Dann wird die Temperatur der inneren Teile des Stäbchens, die an und für sich schon wegen der geringeren Abkühlungsmöglichkeit höher ist als die der äußeren, immer weiter wachsen und schließlich Schmelzen und Verdampfen der Kohle herbei-

1) M. La Rosa, Ann. d. Phys. (4) **34**, 103, 1911.

führen. In der Tat beobachtete La Rosa bei plötzlichem Einschalten des Stromes ein explosionsartiges Zerplatzen des Kohlestabes, als dessen Ursache er Bildung von dampfförmigem Kohlenstoff im Innern des Stabes vermutet.

2. Hat der Generator eine abfallende, beide Verbraucher eine ansteigende Charakteristik, so sind alle drei Stabilitätsbedingungen stets erfüllt. Insbesondere ist das der Fall, wenn der Generator sowohl wie die Verbraucher aus Kombinationen von konstanten Batterien mit konstanten Widerständen bestehen; in diesem Falle kann daher nie Labilität eintreten.

3. Hat der Generator eine abfallende und einer der Verbraucher, z. B. I, eine ansteigende, der andere eine abfallende Charakteristik, so ist Bedingung (18) stets erfüllt; schreibt man die beiden anderen notwendigen und hinreichenden Bedingungen (19) und (16) in der Form:

$$-e_{II}' < -E' \tag{19'}$$

$$-e_{II}' < -E' \frac{e_I'}{e_I' + (-E')}, \tag{16e'}$$

so sieht man, daß (19′) sicher erfüllt ist, wenn (16e′) erfüllt ist, denn in beiden Gleichungen sind die rechten Seiten positiv und die rechte Seite von (16e′) ist kleiner als die von (19′). In diesem Falle bleibt daher allein die Gleichung (16e′) oder (16e):

$$e_{II}' - E' \frac{e_I'}{e_I' - E'} = e_{II}' - E_1' > 0$$

zu erfüllen. Das System verhält sich also so, als ob nur ein Generator mit der Charakteristik E_1 und ein einziger Verbraucher mit der Charakteristik e_{II} vorhanden wäre. Insbesondere gilt das, wenn der Generator und der Verbraucher *I* aus je einer Kombination von konstanten Batterien und Widerständen bestehen; für diesen Fall hat schon Barkhausen[1]) den gleichen Satz abgeleitet und ihn auf den Fall eines beliebig verzweigten, aus Batterien und Widerständen bestehenden Stromsystemes, in dem sich an irgendeiner Stelle ein Verbraucher *II* mit fallender Charakteristik befindet, erweitert und gezeigt, daß man auch dann den ganzen übrigen Teil des Stromkreises (außer dem Verbraucher) als einen

1) H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung. Diss. Göttingen 1907, auch als Buch bei S. Hirzel, Leipzig 1907, S. 54.

Generator mit der Charakteristik E_1 behandeln kann. Da dann zwischen Strömen und Spannungen nur lineare Gleichungen bestehen, wird die Charakteristik E_1 eine gerade Linie nach Art der Widerstandslinie in Fig. 4 mit der Gleichung:

$$E_1 = E_0 - J_{II} W.$$

Barkhausen gibt auch einen einfachen Weg zur Berechnung der Charakteristik E_1 an: E_0 ist diejenige Spannung, die an den Zuleitungen zum Verbraucher *II* liegen würde, wenn man letzteren entfernte; W ist der Widerstand, den das gesamte Stromsystem einer an Stelle von *II* eingeschalteten konstanten EMK. entgegensetzen würde, wenn alle übrigen konstanten EMKK. gleich null wären.

B. Der allgemeine Fall. Ganz ähnlich gestaltet sich die Rechnung in den übrigen, zu Anfang dieses Paragraphen angeführten Fällen, wenn nämlich mehr als zwei Verbraucher von einem Generator oder ein Verbraucher von mehreren parallel geschalteten Generatoren gespeist werden.

Bei Problemen dieser Art braucht man gar nicht zwischen Generatoren und Verbrauchern zu unterscheiden; denn ein Generator läßt sich als Verbraucher auffassen, wenn man den Strom in ihm im umgekehrten Sinne positiv rechnet; er wird dann zu einem Verbraucher, in dem ein negativer Strom fließt; ebenso läßt sich natürlich ein Verbraucher als Generator eines negativen Stromes auffassen. Wenn man daher bei dem zuletzt behandelten Fall (**A**) im Generator noch Selbstinduktion annimmt und statt des Generatorstromes J einen Strom $J_{III} = -J$ einführt:

$$E(J) = e_{III}(-J) = e_{III}(J_{III}), \tag{22}$$

so werden der Generator und die beiden Verbraucher einander vollkommen gleichwertige Apparate, nämlich Leiter mit den Charakteristiken $e_I(J_I)$, $e_{II}(J_{II})$, $e_{III}(J_{III})$. In der Tat werden dann alle Gleichungen des § 3 A symmetrisch in e_I, e_{II}, e_{III} bzw. J_I, J_{II}, J_{III}, also auch die Stabilitätsbedingungen; man erhält sie aus den früheren Gleichungen (18), (19) und (16a) dadurch, daß man in ihnen nach Gl. (22) setzt:

$$E' = -e_{III}'. \tag{23}$$

Daher umfaßt die in § 3 A durchgeführte Rechnung auch den Fall mit, daß zwei parallel geschaltete Generatoren einen Verbraucher

speisen; dazu ist der eine Verbraucher, z. B. *II*, als Generator mit der Charakteristik E_{II} aufzufassen und dementsprechend in Analogie zu Gl. (23) in den Stabilitätsbedingungen e_{II}' durch $-E_{II}'$ zu ersetzen. Wir brauchen die neuen Stabilitätsbedingungen gar nicht erst hinzuschreiben, denn ihre physikalische Bedeutung muß dieselbe sein wie die der früheren Bedingungen: Die den Gleichungen (18—20) entsprechenden Bedingungen sagen aus, daß für je zwei der drei Leiter das Kriterium *A* erfüllt sein muß, während die den Gleichungen (16c—e) entsprechenden Bedingungen die Erfüllung des Kriteriums *A* auch dann verlangen, wenn man als Generatorcharakteristik die Gesamtcharakteristik zweier der drei Leiter und als Verbrauchercharakteristik die des dritten nimmt (oder umgekehrt, wenn man einen der Leiter als Generator und die beiden übrigen zusammen als einen Verbraucher betrachtet).

Aus diesen Stabilitätsbedingungen folgen wieder ähnliche Sätze wie aus den früheren Bedingungen (S. 30—32); hervorgehoben sei hier der der dortigen Folgerung 1 entsprechende Satz:

Zwei Generatoren mit ansteigenden Charakteristiken können nicht in Parallelschaltung arbeiten.

Er folgt aus der der Gl. (19) entsprechenden Bedingung:

$$-E_{II}' - E_{I}' > 0. \tag{24}$$

Für den Spezialfall der leer laufenden Generatoren hatten wir diesen Satz schon in § 2, D, c abgeleitet.

§ 4. Allgemeine mathematische Methode zur Stabilitätsuntersuchung (Methode der kleinen Schwingungen)[1].

Die Methode, deren wir uns im vorigen Paragraphen zur Ableitung der Stabilitätsbedingungen bedient haben, ist in der Mathematik unter dem Namen der „Methode der kleinen Schwingungen“ bekannt. Da die ganze vorliegende Schrift vom Standpunkte des Mathematikers aus schließlich weiter nichts ist als eine Anwendung dieser Methode, so sei jetzt das, was wir weiterhin von ihr gebrauchen werden, abgeleitet.

Die Methode läßt sich anwenden auf jedes System, sei es mechanischer oder elektrischer Art, dessen Zustand mit hinreichender Annäherung an die Wirklichkeit durch eine endliche Zahl n von Variablen x, y . . . und ihre zeitlichen Differentialquotienten bestimmt ist. Man sagt in solchem Falle, das System habe n

1) Webster, Dynamics. Leipzig 1904, § 45.

Freiheitsgrade. (Das im vorigen Paragraphen behandelte System hatte z. B. zwei Freiheitsgrade; die beiden Variablen waren die beiden Ströme J_{I} und J_{II} in den Verbrauchern.) Der Zustand ist durch die Variablen $x, y, \ldots$ in der Weise bestimmt, daß zwischen ihnen und ihren zeitlichen Differentialquotienten (die Physik kommt erfahrungsgemäß mit dem 1. und 2. aus) eine Anzahl von Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} F_1\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots\cdots\right) = 0 \\ F_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots\cdots\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Von diesen Gleichungen, deren Aufstellung im einzelnen Falle Sache des Physikers ist, geht die zu besprechende mathematische Methode aus. Nach ihr ist zweierlei zu tun:

1. Aus den Gleichungen (1) sind dadurch, daß man alle zeitlichen Differentialquotienten gleich null setzt, die Gleichungen für den stationären oder Gleichgewichtszustand zu bilden; sie lauten, wenn $x_0, y_0 \ldots$ die Gleichgewichtswerte von $x, y, \ldots$ sind:

$$\left.\begin{array}{l} F_1\,(x_0, 0, 0, y_0, 0, 0, \cdots\cdots) = 0 \\ F_2\,(x_0, 0, 0, y_0, 0, 0, \cdots\cdots) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Gleichgewichtswerte $x_0, y_0, \ldots$ der Variablen, nötigenfalls auf graphischem Wege, bestimmen. Dazu sind, wenn n Variable vorhanden sind, n Gleichungen nötig; daraus, daß es in der Natur bestimmte Gleichgewichtszustände gibt, folgt, daß in jedem Falle n und nur n voneinander unabhängige Gleichungen (2) und damit auch (1) existieren.

2. Sodann ist das Verhalten des Systems in der Nähe eines durch zusammengehörende Werte $x_0, y_0 \ldots$ bestimmten Gleichgewichtszustandes zu untersuchen. Dazu nimmt man an, daß sich die Variablen $x, y, \ldots$ um kleine Beträge $x_1, y_1 \ldots$ von den Gleichgewichtswerten $x_0, y_0 \ldots$ unterscheiden, d. h. man zerlegt

$$x = x_0 + x_1; \quad y = y_0 + y_1; \cdots$$

Da die x_0, y_0 . . . unabhängig von der Zeit t sind, wird

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1, \ldots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \ddot{x}_1; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = \ddot{y}_1, \ldots$$

und so ergibt die Einsetzung in die Differentialgleichungen (1):

$$F_1\,(x_0 + x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, y_0 + y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot) = 0$$
$$F_2\,(x_0 + x_1, \dot{x}_1, x_1, y_0 + y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot) = 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

Da die x_1, y_1 und auch die $\dot{x}_1$, $\ddot{x}_1$ . . . klein sein sollen, können wir in dem kleinen Intervall, in dem sich die x_1 usw. bewegen, die Funktionen F als linear ansehen (mathematisch ausgedrückt: wir können die F in eine Taylorsche Reihe entwickeln und nur die in x_1 usw. linearen Glieder berücksichtigen) und daher die letzten Gleichungen schreiben:

$$F_1\,(x_0, 0, 0, y_0, 0, 0, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot) + x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \dot{x}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} + \ddot{x}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{x}}$$
$$+ y_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + \dot{y}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} + y_1 \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{y}} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

oder, da wegen der Gleichungen (2) des stationären Zustandes das erste Glied jeder Zeile verschwindet:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \dot{x}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} + \ddot{x}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{x}} + y_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + \dot{y}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} \\ \qquad + \ddot{y}_1 \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{y}} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (3)$$

Man erhält so eine Reihe von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es sind nun zwei verschiedene Verfahren anwendbar:

Entweder kann man aus den Differentialgleichungen alle abhängigen Variablen bis auf eine eliminieren und erhält so für diese eine homogene lineare Differentialgleichung höherer Ordnung, die „Differentialgleichung der kleinen Schwingungen“:

$$a_0 \frac{d^m x_1}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \cdots\cdots + a_{m-1} \frac{dx_1}{dt} + a_m x_1 = 0. \qquad (4)$$

Die gleiche Differentialgleichung mit genau denselben Koeffizienten gilt, wie hier nicht weiter bewiesen werden soll, auch für alle übrigen Variablen. Das Integral dieser Gleichung findet man in bekannter Weise, indem man für x_1 den Ansatz macht:

$$x_1 = A e^{\alpha t}. \qquad (5)$$

Geht man damit in die Differentialgleichung ein, so erhält jedes Glied den Faktor $A e^{\alpha t}$; dividiert man durch diesen Faktor, so bleibt eine algebraische Gleichung $m$ten Grades für α übrig:

$$a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots\cdots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0, \qquad (6)$$

die sogenannte „charakteristische Gleichung“ der Differentialgleichung (4), der α genügen muß, damit unser Ansatz (5) die Differentialgleichung (4) befriedigt.

Gleichung (6) hat m Wurzeln; bezeichnen wir diese mit α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots \alpha_m$, so lautet das allgemeine Integral der Gleichung (4):

$$x_1 = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots\cdots + A_m e^{\alpha_m t}, \qquad (7)$$

wobei die $A_1, A_2 \ldots A_m$ die willkürlichen Integrationskonstanten sind.

Oder aber man integriert das System der simultanen Gleichungen (3) direkt, indem man für sämtliche Variable Exponentialfunktionen der Zeit setzt:

$$x_1 = A e^{\alpha t}; \quad y_1 = B e^{\alpha t}, \cdots\cdot \qquad (8)$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Gleichungen (3) ein, so erhält man, da der Faktor $e^{\alpha t}$, den jedes Glied enthält, weggelassen werden kann, folgende n Gleichungen zur Bestimmung von α und den n Konstanten $A, B, \ldots$:

$$\left.\begin{array}{l}
A\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\alpha\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}+\alpha^2\frac{\partial F_1}{\partial \ddot{x}}\right)+B\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}+\alpha\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}}\right. \\
\qquad\left.+\alpha^2\frac{\partial F_1}{\partial \ddot{y}}\right)+\cdots=0 \\
A\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\alpha\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}+\alpha^2\frac{\partial F_2}{\partial \ddot{x}}\right)+B\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}+\alpha\frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}}\right. \\
\qquad\left.+\alpha^2\frac{\partial F_2}{\partial \ddot{y}}\right)+\cdots=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Diese Gleichungen sind in bezug auf die zu bestimmenden Konstanten $A, B, \ldots$ linear und homogen; wie aus der Algebra bekannt ist, sind n solcher Gleichungen mit n Unbekannten nur dann miteinander verträglich, wenn ihre Determinante:

$$\left|\begin{array}{ll}
\frac{\partial F_1}{\partial x}+\alpha\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}+\alpha^2\frac{\partial F_1}{\partial \ddot{x}}, & \frac{\partial F_1}{\partial y}+\alpha\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}}+\alpha^2\frac{\partial F_1}{\partial \ddot{y}}, \ \ldots \\
\frac{\partial F_2}{\partial x}+\alpha\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}}+\alpha^2\frac{\partial F_2}{\partial \ddot{x}}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \ \ldots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}\right|=0 \quad (6\,a)$$

ist. Damit haben wir eine Bestimmungsgleichung für α allein gewonnen; da der bei dem ersten Verfahren benutzte Ansatz (5) in dem jetzt benutzten Ansatz (8) enthalten ist, muß Gleichung (6a), wenn man die Determinante auflöst und die Gleichung nach Potenzen von α ordnet, die „charakteristische“ Gleichung (6) ergeben.

Setzt man die Wurzeln der Gleichung (6) oder (6a) in die Gleichungen (9) ein, so lassen sich aus ihnen die Konstanten A, $B, C \ldots$ nach den Regeln für die Auflösung linearer Gleichungen bestimmen; für unsere Zwecke ist die Auflösung nicht nötig. Wir wollen nur noch ableiten, in welcher Form die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystemes (3) erscheint:

In den Gleichungen (9) enthält jedes Glied eine der Unbekannten $A, B, C \ldots$ als Faktor; man kann daher durch eine dieser Unbekannten, z. B. A, dividieren, dann kommen in den Gleichungen nur noch die Verhältnisse

$$\frac{B}{A}=b, \quad \frac{C}{A}=c, \ldots.$$

vor; A selbst tritt nicht mehr auf, kann also willkürlich gewählt werden (Integrationskonstante), während sich für die Verhältnisse $b, c, \ldots,$ entsprechend den m Wurzeln α, je m Werte:

$$b_1, b_2 \cdots b_m, \; c_1, c_2 \cdots c_m, \cdots$$

ergeben. Dann lautet das allgemeine Integral des Gleichungssystems (3):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots \quad + A_m e^{\alpha_m t} \\ y_1 = A_1 b_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 b_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_m b_m e^{\alpha_m t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Darin sind die $A_1, A_2 \ldots A_m$ wieder die willkürlichen, d. h. aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden Integrationskonstanten. Wie es sein muß, ist die Gleichung für x_1 (Zeile 1) identisch mit der bei dem ersten Verfahren erhaltenen Gleichung (7). Die Gleichungen für die übrigen Variablen $y_1, z_1 \ldots$ haben, abgesehen von den konstanten Faktoren der einzelnen Glieder, die gleiche Form wie Gleichung (7); damit ist die beim ersten Verfahren aufgestellte Behauptung, daß für alle Variablen dieselbe Differentialgleichung (4) gelte, bewiesen.

Von den beiden Verfahren ist das zweite viel eleganter als das erste; wenn wir trotzdem im folgenden vielfach das erste Verfahren benutzen werden, namentlich dann, wenn die Labilität sich durch Auftreten von Schwingungen äußert, so geschieht das im Interesse der Anschaulichkeit; denn der Physiker ist gewohnt, Schwingungsprobleme an Hand einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, der bekannten Schwingungsdifferentialgleichung, zu behandeln. Beide Verfahren führen jedenfalls zum gleichen, durch die Gleichungen (7) oder (10) ausgedrückten Gesetze für den zeitlichen Verlauf kleiner Abweichungen vom Gleichgewichtszustande. Die Definition der Stabilität ist die, daß das System, wenn es ein wenig aus dem Gleichgewichtszustande herausgebracht wird, von selber wieder zu ihm zurückkehrt, d. h. daß die Abweichungen vom Gleichgewichtszustande im Laufe der Zeit immer kleiner werden, und nach genügend langer Zeit (für $t = \infty$) ganz verschwinden. Demnach ist die Stabilitätsbedingung die: die Gleichungen (10) müssen so beschaffen sein, daß die rechten Seiten für wachsende t unter allen Umständen dem Grenzwerte null zustreben. Da dies für beliebige Abweichungen, d. h. für beliebige

Werte der Integrationskonstanten $A_1 \ldots A_m$, der Fall sein muß, müssen wir verlangen, daß jede einzelne Exponentialfunktion $e^{\alpha t}$ mit wachsender Zeit dem Grenzwerte null zustrebt. Für reelles α ist die Bedingung dafür einfach die, daß α negativ sein muß; wie aus der Diskussion der Schwingungsgleichung bekannt ist, müssen hier aber auch imaginäre und komplexe Werte von α berücksichtigt werden, weil auch dann reelle Werte von x_1, $y_1 \ldots$ herauskommen. Bei rein imaginärem α wird die Exponentialfunktion zu einer trigonometrischen Funktion, d. h. es treten Schwingungen konstanter Amplitude auf; bei komplexem α:

$$\alpha = \beta + i\gamma$$

zerlegt sich die Exponentialfunktion:

$$e^{\alpha t} = e^{\beta t} \cdot e^{i\gamma t} = e^{\beta t} (\cos \gamma t + i \sin \gamma t),$$

d. h. es tritt eine Schwingung auf, deren Amplitude nach einem Exponentialgesetz ($e^{\beta t}$) abnimmt oder zunimmt. Damit hier $e^{\alpha t}$ im Laufe der Zeit verschwindet, muß $e^{\beta t}$ verschwinden, d. h. β, der reelle Teil von α, muss negativ sein. Unser Ergebnis für reelles und komplexes α zusammenfassend, können wir die Stabilitätsbedingung so aussprechen: Die reellen Bestandteile sämtlicher α müssen negativ sein, oder

Gleichung (6) (*oder* (6a)) *darf nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandteilen haben.*

Bemerkenswerterweise kann man die Bedingungen, denen die Koeffizienten einer rationalen algebraischen Gleichung genügen müssen, damit ihre Wurzeln nur negative reelle Bestandteile haben, aufstellen, ohne die Gleichung auflösen zu müssen, und zwar für Gleichungen beliebig hohen Grades. Die Bedingungen sind von Routh[1]), später auf funktionentheoretischem Wege von Hurwitz[2]) abgeleitet worden. Letzterer erhielt sie in folgender übersichtlicher Form:

Gegeben sei eine rationale Gleichung m-ten Grades mit reellen Koeffizienten

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m = 0, \qquad (11)$$

in der

$$a_0 > 0 \qquad (11\text{a})$$

1) Routh, Stability of motion, London 1877; auch in Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper (deutsch von Schepp). Bd. II, §§ 290ff., 1898.

2) A. Hurwitz, Math. Ann. 46, S. 273—284, 1895.

sei; dann bilde man die Determinanten:

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & \cdots, & a_{2\lambda-1} \\ a_0, & a_2, & a_4, & \cdots, & a_{2\lambda-2} \\ 0, & a_1, & a_3, & \cdots, & a_{2\lambda-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, & a_\lambda \end{vmatrix}, \quad \lambda = 1, 2, \cdots m \qquad (12)$$

so, daß in ihnen in den Horizontalreihen die Indizes um je zwei Einheiten wachsen, in den Vertikalreihen um je eine Einheit abnehmen, und daß

$$a_k = 0 \text{ für } k < 0 \text{ oder } k > m$$

gesetzt wird. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Wurzeln der Gleichung (11) nur negative reelle Bestandteile haben:

sämtliche Δ_λ müssen positiv sein. (13)

Die Bedingung läßt sich in eine für die Rechnung bequemere Form bringen:

Da

$$\Delta_1 = a_1$$

und

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} \cdot a_m$$

ist, ist ebenfalls notwendig und hinreichend auch folgende Bedingung: Es muß

$$a_1 > 0; \; \Delta_2, \; \Delta_3, \; \cdots \; \Delta_{m-1} > 0; \; a_m > 0 \qquad (13a)$$

sein. Ferner ist eine notwendige Bedingung:

Sämtliche a müssen positiv sein. (14)

Da die Ausgangsgleichung (11) identisch ist mit unserer früheren Gleichung (6), und zur Stabilität erforderlich war, daß deren Wurzeln nur negative reelle Bestandteile besitzen, so sind die Hurwitzschen Gleichungen (13) oder (13a) direkt die Stabilitätsbedingungen, wenn man die in ihnen auftretenden Größen $a_0, a_1, \cdots a_m$ identifiziert mit den Koeffizienten der Gleichung (6) bezw. der Differentialgleichung (4). Damit ist das Problem der Aufstellung der Stabilitätsbedingungen allgemein gelöst.

Zu bemerken ist noch, daß die einschränkende Bedingung (11a),

$$a_0 > 0 \qquad (11a)$$

der Allgemeinheit der Lösung keinen Abbruch tut; denn wenn Bedingung (11a) nicht erfüllt ist, braucht man nur die ganze Gleichung (11) bezw. (6) mit (—1) zu multiplizieren. Von der Erfüllung der Bedingung (11a) wird man unabhängig, wenn man Gleichung (6) durch Division mit a_0 auf die Form bringt:

$$\alpha^m + a_1'\alpha^{m-1} + a_2'\alpha^{m-2} + \cdots + a_{m-1}'\alpha + a_m' = 0, \qquad (6\text{b})$$

denn dann ist der Faktor von α^m stets gleich $+1$, also Bedingung (11a) immer von selbst erfüllt.

Schließlich wollen wir noch die allgemeinen Stabilitätsbedingungen (13a) anwenden auf die Spezialfälle, daß die Gleichung (6) vom 1.—4. Grade ist, daß also die Differentialgleichung (4) von 1.—4. Ordnung ist.

Wir gelangen so zu folgenden Stabilitätsbedingungen: bei Gleichungen ersten Grades ($m = 1$):

$$a_1 > 0, \qquad (15)$$

bei Gleichungen zweiten Grades ($m = 2$):

$$a_1 > 0; \; a_2 > 0, \qquad (16)$$

bei Gleichungen dritten Grades ($m = 3$):

$$a_1 > 0; \; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \; a_3 > 0 \qquad (17)$$

und schließlich bei Gleichungen vierten Grades ($m = 4$):

$$a_1 > 0; \; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \; a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0; \; a_4 > 0; \qquad (18)$$

wie es sein muß, stimmen die Gleichungen (15) und (16) mit den in § 1 und § 3 auf direktem Wege abgeleiteten Stabilitätsbedingungen (A) in § 1 und (15) und (16) in § 3 überein.

§ 5. Einfluß einer parallel zum Verbraucher geschalteten Kapazität.

Wir wollen nun die im vorigen Paragraphen entwickelte Methode anwenden auf den Fall, daß einem Verbraucher eine elektrostatische Kapazität parallel geschaltet ist. Der Fall ist von Kaufmann[1]) in der im § 1 angeführten grundlegenden Arbeit behandelt worden, um die häufig beobachteten intermittierenden Funkenentladungen zu erklären.

Kaufmann untersuchte die Entladung einer Influenzmaschine

1) W. Kaufmann, l. c.

oder einer Hochspannungsbatterie mit vorgeschaltetem großen Widerstande durch eine Funkenstrecke. Er zeigte, daß die intermittierenden Entladungen, die dann auftreten, auch wenn das 1. Kaufmannsche Stabilitätskriterium erfüllt ist, doch in einer Labilität des Zustandes ihre Ursache haben, und daß auch die Intermittenz sich erklären läßt, wenn man die Funkenstrecke als einen Leiter mit stetig verlaufender Charakteristik betrachtet. Wichtig ist dabei einmal die Kapazität der Elektroden, anderseits die von der „Umwandlungsarbeit" (vgl. S. 12) herrührende scheinbare Selbstinduktion der Funkenbahn. Die Versuchsanordnung entspricht demnach dem Schema der Fig. 13: die Klemmen eines Generators mit der Charakteristik $E(J)$ sind verbunden mit einem Kondensator von der Kapazität C, zu dem parallel ein Verbraucher mit der Charakteristik $e(i)$ mit vorgeschalteter Selbstinduktion L liegt. Die Selbstinduktion des Generators braucht nicht berücksichtigt zu werden, weil, wenn intermittierende Entladungen auftreten, die Charakteristik $E(J)$ (z. B. der Influenzmaschine) so steil abfallen muß, daß gegen die von diesem Abfall herrührende Spannungsänderung $E_1 = J_1 \cdot E'(J)$ die Spannungsänderung an der Selbstinduktion $L \frac{dJ_1}{dt}$ gar nicht in Betracht kommt.

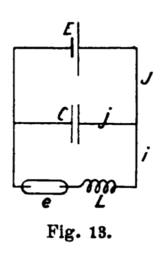


Fig. 13.

Dem Schema entsprechen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} E(J) &= e(i) + L\frac{di}{dt} \\ j = C\frac{dE}{dt} &= C\left(e'(i)\cdot\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}\right) \\ J &= i + j \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(Die Bedeutung der Buchstaben ist aus Fig. 13 zu entnehmen.) Daraus findet man für den Gleichgewichtszustand $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$:

$$j = 0;\; E(J_0) = E(i_0) = e(i_0) \quad (2)$$

und für eine kleine Abweichung i_1 nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Regeln:

$$\left.\begin{aligned} (i_1 + j)\,E'(J_0) &= i_1\; e'(i_0) + L\frac{di_1}{dt} \\ j &= C\; e'(i_0)\frac{di_1}{dt} + LC\frac{d^2i_1}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

woraus man durch Elimination von j erhält:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{e'}{L} - \frac{1}{CE'}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{1 - \frac{e'}{E'}}{LC} i_1 = 0 \tag{4}$$

Das ist die der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen entsprechende Differentialgleichung für den Stromverlauf nach einer Störung des Gleichgewichtszustandes. Damit der Zustand stabil ist, muß die Störung im Laufe der Zeit verschwinden; wie dort abgeleitet, ist die Bedingung dafür die, daß die Koeffizienten von $\frac{di_1}{dt}$ und i_1, a_1 und a_2, positiv sein müssen (Gl. (16), S. 41). Somit lauten hier die Stabilitätsbedingungen

$$a_1 = \frac{e'}{L} - \frac{1}{CE'} > 0 \tag{5}$$

und

$$a_2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{e'}{E'}\right) > 0. \tag{6}$$

In unserem Falle, wo der Anstieg E' der Generatorcharakteristik negativ ist, läßt sich Bedingung (6) schreiben

$$e' - E' > 0 \tag{6a}$$

und wird damit identisch mit dem Kriterium A des § 1. Bedingung (5) und (6a) sind stets erfüllt, wenn $e' > 0$ ist; wir brauchen uns daher nur mit dem Fall zu befassen, daß $e' < 0$ ist. Dazu schreiben wir Gl. (5)

$$-E' < \frac{L}{C}\frac{1}{(-e')} \tag{5a}$$

(2. Kaufmannsches Kriterium).

Schließlich können wir noch (5a) und (6a) zusammenfassen zu

$$(-e') < -E' < \frac{L}{C}\frac{1}{(-e')}. \tag{7}$$

Aus dieser Form sieht man, daß bei gegebenem e', d. h. bei gegebener Verbrauchercharakteristik, die Neigung der Generatorcharakteristik zwischen zwei Grenzen liegen muß; falls die obere Grenze unterhalb der unteren liegt, ist überhaupt keine Stabilität möglich. Es ist deshalb eine notwendige Bedingung der Stabilität

$$-e' < \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7a}$$

Was geschieht nun, wenn die Stabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind? Dann kann nach den Erörterungen auf S. 26 zweierlei eintreten, entweder einfache Labilität oder Schwingungen, je nachdem die Wurzel in den Gleichungen (13) des § 3 reell oder imaginär ist, d. h. je nachdem $a_1^2 - 4a_2$ positiv oder negativ ist. Jedenfalls sieht man: solange a_2 negativ ist, solange also das Kriterium A (Gl. 6a) nicht erfüllt ist, ist die Wurzel reell und es treten keine Schwingungen auf. Ist dagegen (6a) erfüllt, so können, wenn der absolute Betrag von a_1 nicht zu groß ist, Schwingungen auftreten, deren Amplitude bei negativem a_1, d. h. bei Nichterfüllung von Gl. (5) oder (5a), dauernd zunimmt.

Das ist nach Kaufmann im wesentlichen der Vorgang, den wir bei intermittierenden Entladungen zu Beginn jeder einzelnen Entladung beobachten; über den weiteren Verlauf der Schwingung kann unsere Theorie nichts mehr aussagen, weil dann unsere Voraussetzung sehr kleiner Störungen nicht mehr zutrifft. Kaufmann hat die Theorie durch Versuche bestätigt, namentlich gelang es ihm, auch eine kontinuierliche Entladung bei einer Luftfunkenstrecke zu erreichen, indem er in die Funkenstrecke selber, noch vor der Zuleitung zur Kapazität, einen hohen Widerstand einschaltete und dadurch gewissermaßen die Charakteristik e (i) des Verbrauchers weniger steil machte; das erreichte er dadurch, daß er auf die Elektroden Holzkalotten aufsetzte.

Die Resultate dieser letzten Betrachtung lassen sich auch anwenden auf den Fall, daß einem Lichtbogen ein Kondensator parallel geschaltet ist; schreibt man Gl. (5a) in der Form

$$C < \frac{L}{(-e') \cdot (-E')} \qquad (5b)$$

so sieht man, daß, wenn C oberhalb eines gewissen Wertes liegt, keine Stabilität mehr möglich ist; der Lichtbogen muß erlöschen. Das wird durch den Versuch bestätigt[1]. Der Versuch kann zur Ermittlung der scheinbaren Selbstinduktion L des Lichtbogens, die hier durch die „Lichtbogenhysteresis" (Simon) bedingt ist, dienen. Hat C gerade den durch Gleichung (5b) bestimmten Grenzwert, so müssen nach Gl. (4) Schwingungen auftreten, und zwar solche konstanter Amplitude, da a_1, der reelle Teil der α, dann

1) H. Barkhausen, Verh. d. D. Phys. Ges. 11, S. 267—272, 1909.

gleich null ist. Während bei der von Kaufmann untersuchten Funkenstrecke diese Art von Schwingungen nicht beobachtet wurde, lassen sich hier sehr wohl kontinuierliche Schwingungen herstellen, die namentlich dann sehr regelmäßig werden, wenn der wesentliche Anteil der Selbstinduktion L von einer besonders eingeschalteten elektrodynamischen Selbstinduktion herrührt. Wir gelangen so zu einer Anordnung, die in den Grundzügen mit der des Duddellschen tönenden Lichtbogens übereinstimmt. Diese unterscheidet sich von der unseren dadurch, daß die zusätzliche Selbstinduktion nicht in die Zuleitung zum Lichtbogen, sondern in die zur Kapazität eingeschaltet wird. Das ist für die den Schwingungen zugeführte Energie günstiger, ändert aber sonst nicht viel. So läßt sich aus unserm einfachen Schema die Schwingungszahl im selbsttönenden Bogen berechnen; wie aus der Theorie der elektrischen Schwingungen bekannt ist, ist der imaginäre Anteil j der α (Gl. 13 und 14a, § 3) gleich der Schwingungszahl in 2π Sekunden; da a_1 bei kontinuierlichen Schwingungen gleich null ist, wird demnach die Schwingungszahl pro sec:

$$n = \frac{\sqrt{a_2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{1 - e'/E'}}{2\pi\sqrt{LC}} \backsim = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{8}$$

da dann gewöhnlich $\frac{e'}{E'}$ gegen 1 zu vernachlässigen ist, namentlich wenn man durch eine vor den Generator geschaltete Selbstinduktion den Gesamtstrom konstant hält (also $E' = \pm\infty$ macht). Die Formel ist identisch mit der Thomsonschen Formel für die Frequenz freier Schwingungen eines aus einer Kapazität C und Selbstinduktion L bestehenden Schwingungskreises. Jedoch ist hier zu beachten, daß L nicht die reine elektrodynamische Selbstinduktion des Kreises ist, sondern sich zusammensetzt aus dieser (L_1) und einem Anteil L_0, der von der Lichtbogenhysteresis herrührt, wie oben erörtert; daher ist es ohne weiteres verständlich, daß die beobachtete Schwingungszahl kleiner ist als diejenige, die man erhält, wenn man in die Thomsonsche Formel nur die elektrodynamische Selbstinduktion des Schwingungskreises einsetzt. Die von uns kurz angedeutete Rechnung ist für die gewöhnlich übliche Schaltung des Duddellbogens streng von Riecke[1]) durchgeführt worden. Mit dieser Rechnung ist aber die Theorie des Duddell-

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1907.

bogens noch lange nicht erschöpft; vor allem ist noch zu untersuchen, wie die Betrachtungen sich bei endlichen Schwingungsamplituden ändern. Daß dann die Verhältnisse wesentlich anders werden, geht schon allein daraus hervor, daß nach unserer Theorie die Amplitude der Schwingungen nur von den Anfangsbedingungen, d. h. von der Stärke des ersten Anstoßes abhängen müßte, während sich in Wirklichkeit selbsttätig eine ganz bestimmte Amplitude einstellt. Es handelt sich auch hier um ein Stabilitätsproblem[1]; nach unserer, für sehr kleine Amplituden geltenden Theorie müßte das Gleichgewicht bezüglich der Schwingungsamplitude indifferent sein — denn wenn die Amplitude durch eine einmalige Störung geändert wird, so müßte diese geänderte Amplitude bestehen bleiben — während in Wirklichkeit stabiles Gleichgewicht beobachtet wird: nach einer erzwungenen Amplitudenänderung stellt sich von selbst die ursprüngliche Amplitude wieder her. Die Theorie des selbsttönenden Lichtbogens bildet ein großes Kapitel für sich, auf sie näher einzugehen, liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit; es sei daher auf die grundlegenden Arbeiten von Simon[2] und Barkhausen[3] verwiesen, deren Gedankengänge in einer kürzlich erschienenen, oben schon zitierten Monographie von Wagner[4] wiedergegeben und weitergeführt worden sind.

Nachdem wir so den Einfluß einer Kapazität untersucht haben, können wir nun auch die in § 1 angeschnittene Frage entscheiden, welche Stabilitätsbedingung für einen praktisch induktions- und kapazitätsfreien Stromkreis gilt. Dazu ist in den Stabilitätsbedingungen (5) und (6a)[5] der auf S. 7 geforderte Grenzübergang für $L=0$ und $C=0$ auszuführen. Macht man das, so bleibt Bedingung (6a)

$$e' - E' > 0 \tag{6a}$$

ungeändert; bei einem praktisch induktions- und kapazi-

1) Ein ähnliches Problem ist in § 12, B, d (S. 123—125) behandelt.

2) H. Th. Simon, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. Bd. I, S. 16—68, 1908.

3) H. Barkhausen, Das Problem d. Schwingungserzeugung. Leipzig 1907.

4) K. W. Wagner, Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Leipzig 1910.

5) Diese Überlegungen gelten nur für abfallende Generatorcharakteristik ($E' < 0$). Ist $E' > 0$, so gelten die ganzen Überlegungen dieses Paragraphen nicht, weil dann die Vernachlässigung der Generatorselbstinduktion nicht mehr erlaubt ist. Berücksichtigung dieser Selbstinduktion ergiebt auch bei ansteigender Generatorcharakteristik das Kriterium A als eine notwendige Bedingung der Stabilität.

tätsfreien Kreise ist also Erfülllung des Kriteriums A eine notwendige Bedingung der Stabilität.

Die zweite Stabilitätsbedingung (5) schreiben wir zweckmäßig in der Form

$$e' - \frac{L}{C}\frac{1}{E'} > 0 \tag{5c}$$

Diese Bedingung ist, wenn wir L und C gleich Null setzen, nur dann erfüllt, wenn $e' > 0$ und $E' < 0$ ist; in allen andern Fällen wird die Gleichung unbestimmt; der Grenzübergang hat also keinen Sinn. Physikalisch bedeutet das: wenn wir auch zu noch so kleinen Werten von L und C übergehen, so wird die Stabilitätsbedingung doch nicht unabhängig von der Größe von L und C; Kapazität und Selbstinduktion sind, wenn sie auch noch so klein sind, immer noch wesentlich für die Stabilität; für die Stabilitätsbetrachtung gibt es im allgemeinen keine kapazitäts- und induktionsfreien Stromkreise, auch nicht annähernd.

§ 6. Dynamische Charakteristiken.

Der im vorigen Paragraphen behandelte Fall bildet ein Beispiel dafür, daß eine Versuchsanordnung äußerlich mit dem Schema, für das in § 1 das Kriterium A abgeleitet wurde, vollkommen übereinstimmen kann, und daß trotzdem die Anwendung dieses Kriteriums auf Widersprüche mit der Erfahrung führt. Denn wenn man in Fig. 13 den Kondensator mit zum Verbraucher rechnet, so hat man einen Verbraucher, wie er durch das Schema der Fig. 14 dargestellt ist (KK sind die Klemmen dieses Verbrauchers), und einen ihn speisenden Generator, also denselben Fall, den wir in § 1 voraussetzten. Wenn wir die Charakteristik dieses Verbrauchers in der üblichen Weise, nämlich durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung mittelst Ampere- und Voltmeters, aufnehmen, so erhalten wir auch eine wohldefinierte Kurve, nämlich dieselbe Charakteristik, welche die früher als Verbraucher behandelte Gasstrecke G besitzt; denn die Messung können wir mit den genannten Instrumenten nur bei Gleichgewicht ausführen, und dann ist der Strom in C und die Spannung über L Null.

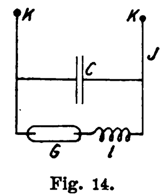


Fig. 14.

Daß trotzdem das Kriterium A nicht anwendbar ist, liegt daran, daß hier eine Voraussetzung nicht erfüllt ist, die wir damals machen

mußten, nämlich die, daß Strom und Spannung eindeutig miteinander durch eine Funktion oder Charakteristik zusammenhängen müssen. Im vorliegenden Falle ergibt die Charakteristik der Gasstrecke $e = e(i)$ zwar für den Fall des Gleichgewichtes die zusammengehörenden Werte von Strom und Spannung an den Klemmen KK, nicht aber für den allgemeinen Fall; dann kommt vielmehr zu dem Strom i in der Gasstrecke noch der Ladestrom $j = C\frac{dE}{dt}$ des Kondensators hinzu (abgesehen davon, daß zur Spannung e noch die Spannung $L\frac{di}{dt}$ über der Selbstinduktion hinzukommt; das war ja auch in § 1 vorausgesetzt worden). Nur für den Fall, daß $\frac{dE}{dt} = 0$ ist, d. h. bei Gleichgewicht oder unendlich (besser hinreichend) langsamen Spannungsänderungen, geht diese allgemeine Beziehung zwischen Strom und Spannung in die einfache Gleichung der Charakteristik: $e = e(i) = e(J)$ über, die dem Kriterium A zugrunde liegt; d. h. nur bei sehr langsamen Spannungs- und Stromänderungen verläuft in dem E, J Diagramm der dem Betriebszustande entsprechende Punkt auf der Charakteristik $e(J)$. Bei schnellen Änderungen dagegen verläuft der Zustand längs einer anderen Kurve, die man nach Simon die „dynamische Charakteristik" nennt, im Gegensatz zur „statischen Charakteristik", welche die Gleichgewichtswerte von Strom und Spannung einander zuordnet (also im vorliegenden Falle mit der Kurve $e = e(J)$ identisch ist).

Der Fall, daß die dynamische Charakteristik, d. h. diejenige Kurve, auf der bei schnellen Änderungen der Zustand in Wirklichkeit verläuft, von der statischen Charakteristik abweicht, kommt sehr häufig vor, und zwar sowohl bei Verbrauchern, wie auch bei Generatoren; genau genommen liegt er eigentlich stets vor. Wenn wir die in § 2 behandelten Beispiele daraufhin durchsehen, so finden wir ihn auch dort: Bei den Gasstrecken ist es die Hysteresis, bei der Nernstlampe die Wärmekapazität, beim Hauptstromgenerator sind es die im Magneteisen auftretenden Wirbelströme, die eine Abweichung der dynamischen von der statischen Charakteristik hervorrufen.

Natürlich ist für die Stabilität die dynamische Charakteristik maßgebend. Jedoch erscheint der Versuch, ein Stabilitätskriterium abzuleiten, bei dem die dynamische Charakteristik dieselbe Rolle

spielt, wie beim Kriterium A die statische, schon deshalb aussichtslos, weil die dynamische Charakteristik keine unveränderliche, für den Verbraucher oder Generator „charakteristische“ Kurve ist, sondern ihr Verlauf je nach Größe und Schnelligkeit der Stromänderungen ein verschiedener ist; denn wie das zu Anfang dieses Paragraphen besprochene Beispiel (Fig. 14) zeigt, treten in der Beziehung zwischen e und J auch noch die Differentialquotienten der beiden Variablen auf. Man muß deshalb zur Aufstellung des Stabilitätskriteriums analytisch vorgehen, indem man unter Berücksichtigung aller für den Stromkreis gültigen Gleichungen und Differentialgleichungen das Verfahren des § 4 anwendet. Will man dieses wenigstens formal einigermaßen analog zu der Ableitung des Kriteriums A (§ 1) gestalten, so kann man so vorgehen, daß man, nachdem man die verschiedenen Gleichungen für die Abweichungen der Variablen von ihren Gleichgewichtswerten (die Gleichungen (3) des § 4) aufgestellt hat, die Elimination der Variablen aus ihnen, d. h. den Übergang zu der Gleichung (4) des § 4, in zwei Schritten ausführt:

Man behandelt zuerst die auf den Verbraucher (bzw. das System, das man als Verbraucher behandeln will) bezüglichen Gleichungen für sich allein und eliminiert aus ihnen alle Variablen bis auf zwei, nämlich die Spannungsänderung e_1 an den Verbraucherklemmen und die Stromänderung J_1 im Verbraucher; ebenso verfährt man mit den für den Generator geltenden Gleichungen. Auf diese Weise erhält man für den Verbraucher (und ebenso für den Generator) eine Gleichung zwischen Spannungsänderung und Stromänderung und deren Differentialquotienten; diese Gleichung bildet das Analogon zu der Gleichung der statischen Charakteristik in der Differentialform

$$e_1 = J_1 \cdot e' \text{ (bzw. } E_1 = J_1 \cdot E')$$

(Gl. 5 und 6, § 1), wir können jene deshalb die Gleichung der dynamischen Charakteristik nennen. Die Gleichung der dynamischen Charakteristik ist also eine Differentialgleichung; enthält sie die Differentialquotienten von e_1 und J_1 nicht, so ist sie identisch mit der Gleichung der statischen Charakteristik; dann fallen statische und dynamische Charakteristik zusammen.

Der zweite Schritt ist der, daß man aus den Gleichungen der dynamischen Charakteristik des Generators und Verbrauchers die Differentialgleichung für den Ausgleich kleiner Gleichgewichts-

störungen (Gleichung (4), § 4) ableitet dadurch, daß man aus ihnen eine der beiden Variablen, z. B. die Spannungsänderung $e_1 = E_1$, eliminiert.

Zur Erläuterung des Gesagten sei dieses Verfahren auf das Beispiel des vorigen Paragraphen angewandt (Fig. 13): Wir nehmen als Generator die Stromquelle selber; auf ihn bezieht sich von den für das System gültigen Gleichungen nur eine:

$$E = E(J),$$

also

$$E_1 = J_1 \cdot E'; \tag{1}$$

die dynamische Charakteristik fällt mit der statischen zusammen. Als Verbraucher behandeln wir den übrigen Teil der Schaltung, also das Schema von Fig. 14; hierfür gelten die Gleichungen (1) des § 5, aus denen wir für kleine Änderungen erhalten

$$E_1 = i_1 e' + L \frac{di_1}{dt}$$

$$j = C \frac{dE_1}{dt}$$

$$J_1 = i_1 + j = i_1 + C \frac{dE_1}{dt}.$$

Eliminiert man daraus i_1 und j, indem man in die erste der Gleichungen einsetzt

$$i_1 = J_1 - C \frac{dE_1}{dt},$$

so erhält man

$$CL \frac{d^2E_1}{dt^2} + Ce' \frac{dE_1}{dt} + E_1 = J_1 e' + L \frac{dJ_1}{dt} \tag{2}$$

als Gleichung der dynamischen Charakteristik einer Gasstrecke mit parallel geschaltetem Kondensator. Zur Ableitung der Stabilitätsbedingungen sind in Gleichung (1) und (2) die E_1 und J_1 je einander gleichzusetzen und eine der beiden Größen, z. B. E_1, zu eliminieren; führt man das aus, so erhält man für J_1 eine Differentialgleichung, die mit Gleichung (4) des § 5 übereinstimmt, wie es auch sein muß.

Im einzelnen Falle mag es meistens wohl einfacher erscheinen, die Differentialgleichung für den Ablauf kleiner Störungen d i r e k t, anstatt auf dem Umwege über die Gleichungen der dynamischen Charakteristik abzuleiten; doch ist dieser letzte Weg, abgesehen

davon, daß er die Ableitung der allgemeinen Stabilitätsbedingungen zu der Ableitung des Kriteriums A in Parallele setzt, unter Umständen auch praktisch vorteilhafter, z. B. dann, wenn das Verhalten desselben Verbrauchers in Verbindung mit verschiedenen Generatoren untersucht werden soll; dann braucht die Gleichung der dynamischen Charakteristik des Verbrauchers nur einmal abgeleitet zu werden.

Die Ableitung des Kriteriums A läßt sich als Spezialfall der Ableitung des allgemeinen Stabilitätskriteriums aus den Gleichungen der dynamischen Charakteristik auffassen. Dazu müssen wir auch hier die Ableitung der Differentialgleichung für den Ausgleich einer kleinen Gleichgewichtsstörung in zwei Schritten vornehmen, indem wir zuerst die Gleichungen der dynamischen Charakteristiken aufstellen und dann erst aus diesen die Differentialgleichung für den Verlauf kleiner Abweichungen vom Gleichgewichtszustande ableiten. Wir setzen wieder, wie in § 1, voraus, ein Generator mit der Charakteristik $E = E(J)$ sei verbunden mit einem Verbraucher mit der Charakteristik $e = e(J)$; der Stromkreis enthalte Selbstinduktion. Wir betrachten jetzt die Selbstinduktion nicht, wie damals, als besonderen Teil des Stromkreises, sondern rechnen sie entweder zum Generator oder zum Verbraucher; nehmen wir an, sie gehöre zum Verbraucher, so gilt für den Generator

$$E = E(J), \quad \text{also} \quad E_1 = J_1 \cdot E' \tag{3}$$

— hier fallen also statische und dynamische Charakteristik zusammen — und für den Verbraucher

$$E = e(J) + L\frac{dJ}{dt}, \quad \text{also} \quad E_1 = e' \cdot J_1 + L\frac{dJ_1}{dt} \tag{4}$$

als Gleichung der dynamischen Charakteristik. Beide Gleichungen miteinander kombiniert ergeben durch Elimination von E_1 die Differentialgleichung

$$J_1 E' = J_1 e' + L\frac{dJ_1}{dt}. \tag{5}$$

aus der wir in § 1 das Kriterium A ableiteten.

Gleichung (4) zeigt, daß die Selbstinduktion des Verbrauchers eine Abweichung der dynamischen von der statischen Charakteristik bewirkt. Gehört die Selbstinduktion zum Generator, so tritt das Glied $L\frac{dJ_1}{dt}$ anstatt in Gleichung (4) in Gleichung (3) auf, d. h.

dann weicht beim Generator die dynamische Charakteristik von der statischen ab. Demnach können wir die in § 1 nötige Voraussetzung, daß der Stromkreis Selbstinduktion enthalten müsse, auch so aussprechen und gleichzeitig erweitern: Dafür, daß für einen Stromkreis, der nur aus einem Generator und einem Verbraucher besteht, in bezug auf die statischen Charakteristiken das Kriterium A gilt, ist eine hinreichende Bedingung, daß entweder beim Verbraucher oder beim Generator oder bei beiden die dynamische Charakteristik in der gleichen Weise von der statischen abweicht, wie es beim Vorhandensein von Selbstinduktion der Fall ist; d. h. ihre Gleichung muß die Form haben

$$\left.\begin{aligned} &\text{beim Verbraucher:} \quad E_1 = J_1 e' + L_1 \frac{dJ_1}{dt}, \\ &\text{beim Generator:} \quad E_1 = J_1 E' - L_2 \frac{dJ_1}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei die L irgendwelche positiven Konstanten sind. Falls die Abweichung zwischen statischer und dynamischer Charakteristik bei Generator und Verbraucher vorhanden ist, genügt es natürlich, wenn die gesamte scheinbare Selbstinduktion $L_1 + L_2$ größer als null ist.

Damit das Kriterium A gilt, braucht also nicht unbedingt Selbstinduktion im Stromkreise vorhanden zu sein; es genügt dazu vielmehr, wenn die dynamischen Charakteristiken so beschaffen sind, daß bei einer Gleichgewichtsstörung die Stromänderung J_1 der Gesamtspannungsänderung $E_1 - e_1$ nacheilt, oder, mathematisch gesprochen, daß für kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustande die Differentialgleichung (5) gilt, und daß die darin vorkommende Konstante L positiv ist. Wir können den Gültigkeitsbereich des Kriteriums A noch etwas weiter ausdehnen: jene Bedingungen sind — allerdings mit Einschränkung — auch dann noch erfüllt, wenn die Gleichung der dynamischen Charakteristik des Verbrauchers die kompliziertere Form hat

$$P \frac{dE_1}{dt} + E_1 = J_1 e' + L \frac{dJ_1}{dt}, \tag{7}$$

und beim Generator statische und dynamische Charakteristik übereinstimmen; denn eliminiert man aus Gleichung (7) und der Gleichung der Generatorcharakteristik (Gl. 3) die Spannungsänderung E_1, so erhält man

$$J_1(e' - E') + (L - PE')\frac{dJ_1}{dt} = 0, \tag{8}$$

eine Gleichung, die in der Tat formal mit Gleichung (5) identisch ist, nur ist der Faktor von $\frac{dJ_1}{dt}$ hier gleich $L - PE'$ statt L. Da zur Gültigkeit des Kriteriums A L positiv sein mußte, der Ausdruck $L - PE'$ aber auch negativ werden kann, so gilt hier dieses Kriterium nur unter der einschränkenden Bedingung, daß

$$L - PE' > 0 \tag{9}$$

ist.

Durch den letzten Satz ist eigentlich erst streng bewiesen, daß das Kriterium A auch auf den Lichtbogen und von der Temperatur abhängige Widerstände angewandt werden kann; denn bei diesen Verbrauchern hat die Gleichung der dynamischen Charakteristik tatsächlich die Form der Gleichung (7)[1], und zwar ist darin P positiv. Da bei den in § 2 behandelten Fällen der Generator eine abfallende Charakteristik hatte, also E' negativ war, so ist die Bedingung (9) stets erfüllt; damit ist die Anwendung des Kriteriums A auf jene Fälle, die wir dort auf Grund qualitativer Überlegungen als erlaubt angesehen hatten, nachträglich streng gerechtfertigt.

Eine analoge Überlegung läßt sich natürlich anstellen, wenn der Generator eine dynamische Charakteristik nach Art von Gleichung (7) hat und beim Verbraucher statische und dynamische Charakteristik übereinstimmen. In diesem Fall findet man leicht für die Anwendbarkeit des Kriteriums A folgende Bedingung: ist

$$-P\frac{dE_1}{dt} + E_1 = J_1 E' - L\frac{dJ_1}{dt} \tag{7a}$$

die Gleichung der dynamischen Charakteristik des Generators,

$$E_1 = J_1 \cdot e'$$

die des Verbrauchers, so gilt das Kriterium A, wenn

$$L - Pe' > 0 \tag{9a}$$

ist.

Die Gleichungen (7) und (7a) in Verbindung mit (9) und (9a) enthalten übrigens die Gleichungen (6), mit Ausnahme des Falles,

1) K. W. Wagner, l. c. S. 26, Gleichung (33).

daß sowohl beim Generator, als auch beim Verbraucher statische und dynamische Charakteristik voneinander abweichen.

Somit können wir als Resultat dieses Paragraphen folgenden Satz über den Gültigkeitsbereich des Kriteriums A aussprechen:

Besteht ein Stromkreis nur aus einem Generator und einem Verbraucher[1]), so gilt das Stabilitätskriterium A:

$$e' - E' > 0$$

(e' bzw. E' ist der „Anstieg" der statischen Charakteristik des Verbrauchers bzw. Generators) dann und nur dann, wenn beim Generator oder beim Verbraucher oder bei beiden die dynamische Charakteristik von der statischen in folgender Weise abweicht:

a) Ist die Abweichung nur beim Verbraucher vorhanden, so gilt jenes Kriterium, wenn die Gleichung der dynamischen Charakteristik des letzteren lautet:

$$P\frac{dE_1}{dt} + E_1 = J_1 e' + L\frac{dJ_1}{dt} \tag{7}$$

und wenn

$$L - PE' > 0 \tag{9}$$

ist.

b) Falls nur beim Generator die dynamische Charakteristik von der statischen abweicht, so gilt das Kriterium A, wenn die Gleichung jener die Form hat:

$$-P\frac{dE_1}{dt} + E_1 = J_1 E' - L\frac{dJ_1}{dt} \tag{7a}$$

und

$$L - Pe' > 0 \tag{9a}$$

ist.

c) Wenn die Abweichung sowohl beim Generator, wie auch beim Verbraucher vorliegt, so müssen, damit das Kriterium A gilt, die Gleichungen der dynamischen Charakteristiken lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\text{beim Verbraucher:} \quad E_1 = J_1 e' + L_1\frac{dJ_1}{dt} \\ &\text{beim Generator:} \quad E_1 = J_1 E' - L_2\frac{dJ_1}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

1) Diese Voraussetzung ist wichtig, sie schließt aber andererseits das Vorhandensein von Selbstinduktionen oder Kapazitäten nicht aus, weil diese zum Verbraucher oder zum Generator gerechnet werden können.

und es muß

$$L_1 + L_2 > 0$$

sein.

§ 7. Die Gleichstrom-Nebenschluß-Dynamomaschine.

Wenn die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Bedingungen für die Gültigkeit des Kriteriums A nicht erfüllt sind, so kann zwar unter Umständen in den richtigen Stabilitätsbedingungen das Kriterium A als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung enthalten sein — das war bei dem Beispiel des § 5 der Fall —; in anderen Fällen kann aber auch die wirkliche Stabilitätsbedingung gerade das Gegenteil vom Kriterium A aussagen.

Als Beispiel für diese letztere Möglichkeit wollen wir jetzt den Fall behandeln, daß eine Nebenschlußmaschine als Generator einen konstanten Widerstand als Verbraucher speist. Die Charakteristik der Maschine zeigt Fig. 15. Die Klemmenspannung E hat bei offenem Stromkreise ($J = 0$) ein Maximum; entnimmt man der Maschine Strom, indem man z. B. die Klemmen durch einen Rheostaten schließt, so nimmt E infolge des Ohmschen Spannungsabfalles im Anker und infolge der entmagnetisierenden Wirkung des Ankerstromes (Ankerrückwirkung) ab; die Abnahme wird noch dadurch vergrößert, daß infolge der sinkenden Spannung auch der Feldstrom und damit die im Anker induzierte EMK. sinkt. Bei weiterer Verringerung des Schließungswiderstandes wird die Abnahme der Spannung so stark, daß auch der Strom wieder abnimmt; schließlich wird bei kurzgeschlossenem Rheostaten die Spannung null. Damit verschwindet auch der Erregerstrom; wegen des remanenten Magnetismus sinkt die induzierte EMK. und damit der Ankerstrom nicht ganz auf null. Die Charakteristik ist demnach bei größeren Spannungen, oberhalb des Strommaximums M, eine abfallende; unterhalb M steigt sie an.

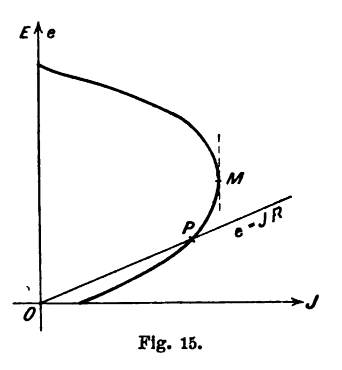


Fig. 15.

Schließt man die Maschine durch einen Widerstand R, dessen Charakteristik die Gerade $e = JR$ (Fig. 15) ist, so wäre nach dem Kriterium A der Betriebszustand nur dann stabil, wenn der

Schnittpunkt P der beiden Charakteristiken auf dem oberen, abfallenden Teil der Generatorcharakteristik läge; unterhalb M müßte Labilität eintreten, weil auf diesem Aste stets die Charakteristik des Generators steiler ansteigt als die des Verbrauchers.

In Wirklichkeit ist dagegen der Zustand stets stabil, auch wenn P unterhalb M liegt, im Widerspruch mit dem Kriterium A; die Aufnahme der ganzen Generatorcharakteristik läßt sich ohne Schwierigkeit bewerkstelligen, indem man die Maschine durch einen Rheostaten schließt.

Der Widerspruch erklärt sich damit, daß die (am Schluß von § 6 zusammengestellten) Bedingungen für die Gültigkeit des Kriteriums A hier nicht erfüllt sind; die dynamische Charakteristik des Generators weicht in ganz anderer Weise von der statischen ab als dort verlangt wird. Das liegt daran, daß die Spannung des Generators nicht nur vom Ankerstrom J, sondern auch vom Feldstrom i abhängt; wegen der großen Selbstinduktion der Feldwicklung erreicht aber i bei einer Zustandsänderung nur sehr langsam seinen stationären Wert; bei schnellen Änderungen der übrigen Variabeln können wir in erster Annäherung sogar den Feldstrom i konstant setzen. Dann wird die Spannung nur noch durch den Spannungsabfall im Anker und durch die Ankerrückwirkung beeinflußt; beide bewirken ein Sinken der Spannung mit zunehmendem Strom, die dynamische Charakteristik fällt also längs der ganzen statischen Charakteristik ab; in bezug auf jene muß nach dem Kriterium A in Übereinstimmung mit der Erfahrung überall Stabilität herrschen.

Zur strengen Behandlung des Problems müssen wir die Gleichung der dynamischen Charakteristik aufstellen. Für die Nebenschlußmaschine gelten folgende Gleichungen:

$$E = H(i) - JW - L_a \frac{dJ}{dt}. \tag{1}$$

Hierin ist $H(i)$ die im Anker induzierte EMK., die bei konstanter Umdrehungsgeschwindigkeit nur vom Magnetfelde, also nur vom Feldstrom i abhängt; W ist der Ankerwiderstand, L_a die Ankerselbstinduktion. Gleichung (1) sagt aus, daß die Klemmenspannung E gleich der induzierten EMK. ist, vermindert um den Ohmschen und den induktiven Spannungsabfall im Anker. Noch nicht berücksichtigt ist in Gl. (1) die Ankerrückwirkung; wir können ihr aber Rechnung tragen, ohne Gl. (1) zu ändern. Die Erfahrung

hat nämlich gezeigt, daß die von der Ankerrückwirkung herrührende Spannungsverminderung mit großer Annäherung dem Ankerstrom J proportional, sagen wir gleich $J W_r$ ist; wir können sie daher berücksichtigen, indem wir für W nicht den wirklichen Ankerwiderstand W_a einsetzen, sondern einen entsprechend größeren Betrag,

$$W = W_a + W_r ,$$

den wir den „scheinbaren Ankerwiderstand" nennen wollen. Dann ist die wirklich induzierte EMK. nicht mehr gleich $H(i)$, sondern kleiner; wir wollen aber der Einfachheit halber für $H(i)$ den Ausdruck „induzierte EMK." beibehalten.

Die zweite für die Nebenschlußmaschine geltende Gleichung ist die Differentialgleichung des Feldstromes i:

$$E = i w + l \frac{d i}{d t}, \tag{2}$$

worin w der Widerstand und l die Selbstinduktion der Feldwicklung ist.

Für den stationären Zustand $\left(\frac{d}{d t} = 0\right)$ findet man aus Gl. (1) und (2):

$$E_0 = H(i_0) - J_0 W, \tag{1a}$$

$$E_0 = i_0 w, \tag{2a}$$

woraus man durch Elimination von i_0 die Gleichung der statischen Charakteristik erhält:

$$E_0 = H\left(\frac{E_0}{w}\right) - J_0 W. \text{ [1]} \tag{3}$$

---

1) Ausgehend von Gleichung (3) in der Form:

$$J_0 W = H\left(\frac{E_0}{w}\right) - E_0 = H(i_0) - i_0 w \tag{3a}$$

kann man in sehr einfacher Weise auf graphischem Wege die statische Charakteristik der Nebenschlußmaschine vorherbestimmen:

Wir tragen in einem Diagramm (Fig. 16) den Erregerstrom $i_0 = \frac{E_0}{w}$ als Abszisse auf und als Ordinate einmal die Klemmenspannung $E_0 = i_0 w$, das andere Mal die induzierte EMK. $E_i = H(i_0)$. Im ersten Falle erhalten wir eine durch den Ursprung gehende Gerade OBD, im zweiten eine Kurve $FMCD$, die, abgesehen vom Abszissen- und Ordinatenmaßstabe, identisch ist mit der Magnetisierungskurve des magnetischen Kreises der Maschine und Leerlaufcharakteristik genannt wird. Ziehen wir nun parallel zur Ordinatenachse

Aus Gleichung (1) und (2) erhält man unter Berücksichtigung von (1a) und (2a) für kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustande analog wie früher

$$E_1 = i_1 H'(i_0) - J_1 W - L_a \frac{dJ_1}{dt}, \tag{1b}$$

$$E_1 = i_1 w + l \frac{di_1}{dt}, \tag{2b}$$

---

eine beliebige Gerade $A C$, so ist das auf ihr von den beiden Kurven abgeschnittene Stück $B C$ gleich $H(i_0) - i_0 w$, also nach Gl. (3a) proportional dem Ankerstrom J_0, während die zugehörige Abszisse $O A = i_0 = \frac{E_0}{w}$ proportional der Klemmenspannung E_0 ist. Bis auf den Maßstab geben uns also die Strecken $B C$ und $O A$ zusammengehörende Werte von Strom und Spannung, und damit läßt sich der Verlauf der Charakteristik schon übersehen. Da $O B$ proportional zu $O A$ und damit auch zu E_0 ist, können wir auch sagen:

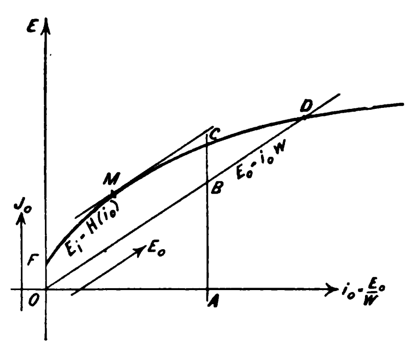


Fig. 16.

In dem schiefwinkligen Koordinatensystem, dessen Ordinatenachse die Gerade $E_0 = i_0 w$ und dessen Abszissenachse die Gerade $O E$ (die Ordinatenachse des ursprünglichen Systems) ist, gibt uns die Kurve $E_i = H(i_0)$ bis auf den Maßstab direkt die statische Charakteristik.

Der Verlauf dieser Charakteristik stimmt im Prinzip mit der in Fig. 15 gezeichneten Kurve überein: Die Spannung sinkt vom Maximalwert, den sie beim Strom null (Punkt D, Fig. 16) hat, längs der Charakteristik beständig bis auf null (Punkt F); der Strom steigt von D aus vom Werte null zunächst bis zum Maximum M (das ist der Punkt, in dem die Tangente an die Kurve parallel zur neuen Ordinatenachse $O D$ ist) und sinkt dann wieder.

Über eine ähnliche in der Elektrotechnik gebräuchliche Konstruktion, bei der man die Charakteristik im richtigen Maßstabe in rechtwinkligen Koordinaten erhält, siehe Silv. P. Thompson, Die dynamo-elektrischen Maschinen. Bd. I. 7. Aufl., Halle 1907, S. 312.

woraus man durch Elimination von i_1 findet:

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + \left(\frac{w}{l} + \frac{W}{L_a}\right)\frac{dJ_1}{dt} + \frac{w}{l}\frac{W}{L_a}J_1 + \frac{1}{L_a}\frac{dE_1}{dt}$$

$$+ \frac{w - H'(i_0)}{l L_a} E_1 = 0 \tag{4}$$

als Gleichung der dynamischen Charakteristik der Nebenschlußmaschine. Wir wollen in Gl. (4) den Ausdruck $w - H'(i_0)$ durch einen anderen ersetzen. Differenziert man die Gleichung der statischen Charakteristik (3) nach J_0, so ergibt sich:

$$\frac{dE_0}{dJ_0} = H'(i_0) \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{dE_0}{dJ_0} - W$$

oder

$$\frac{dE_0}{dJ_0} = -\frac{w W}{w - H'(i_0)},$$

also

$$w - H'(i_0) = -w W \frac{1}{\left(\frac{dE_0}{dJ_0}\right)}. \tag{5}$$

$\frac{dE_0}{dJ_0}$ ist gleich dem Anstieg der statischen Charakteristik der Maschine und wird deshalb zweckmäßig $E'(J_0)$ oder kurz E' geschrieben. Damit erhält Gleichung (4) die Form:

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + \left(\frac{w}{l} + \frac{W}{L_a}\right)\frac{dJ_1}{dt} + \frac{w}{l}\frac{W}{L_a}J_1 + \frac{1}{L_a}\frac{dE_1}{dt}$$

$$- \frac{w W}{l L_a}\frac{1}{E'} E_1 = 0. \tag{4a}$$

Um nun die Stabilität des Systems: Nebenschlußgenerator — induktionsfreier Widerstand zu untersuchen, ist aus Gleichung (4a) und der Gleichung der dynamischen Charakteristik des letzteren

$$E_1 = e_1 = J_1 R \tag{6}$$

eine der beiden abhängigen Variablen, z. B. die Spannungsänderung E_1, zu eliminieren; man erhält:

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + \left(\frac{w}{l} + \frac{W}{L_a} + \frac{R}{L_a}\right)\frac{dJ_1}{dt} + \frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\left(1 - \frac{R}{E'}\right)J_1 = 0. \tag{7}$$

Nach Gl. (16), § 4 (S. 41) müssen, damit der Zustand stabil ist,

die Koeffizienten von $\frac{dJ_1}{dt}$ und J_1 positiv sein; demnach lauten hier die Stabilitätsbedingungen:

$$\frac{w}{l} + \frac{W}{L_a} + \frac{R}{L_a} > 0 \tag{8}$$

und

$$\frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\left(1 - \frac{R}{E'}\right) > 0. \tag{9}$$

Da w, l, W, L_a, R sämtlich positiv sind, ist Bedingung (8) stets erfüllt und (9) vereinfacht sich zu

$$1 - \frac{R}{E'} > 0. \tag{9a}$$

Im oberen Aste der statischen Charakteristik (Fig. 15), der dem normalen Betriebe entspricht, ist E' negativ; dort ist (9a) stets erfüllt; im unteren ansteigenden Aste der statischen Charakteristik ist E' positiv; wir können dann Bedingung (9a) schreiben:

$$E' - R > 0. \tag{9b}$$

In dieser Form sagt die Stabilitätsbedingung aus, daß die Charakteristik des Generators steiler ansteigen muß als die Widerstandsgerade OP (Fig. 15), gerade umgekehrt wie es das Kriterium A verlangt. Wie Fig. 15 zeigt, ist diese Bedingung praktisch stets erfüllt; nach der Theorie ist also längs der ganzen statischen Charakteristik Stabilität zu erwarten, und das wird durch die Erfahrung bestätigt.

Wir wollen jetzt die Betrachtung erweitern auf den Fall, daß die Maschine einen Verbraucher mit beliebiger statischer Charakteristik $e(J)$ speist; wir wollen auch zulassen, daß bei diesem Verbraucher die dynamische Charakteristik von der statischen in der Weise abweicht, wie es beim Vorhandensein von Selbstinduktion der Fall ist; wir ersetzen dazu Gl. (6) durch die allgemeinere Gleichung für die dynamische Charakteristik des Verbrauchers

$$E_1 = J_1 \cdot e' + L\frac{dJ_1}{dt}, \tag{6a}$$

worin L, die wirkliche oder scheinbare Selbstinduktion des Verbrauchers, eine positive Konstante ist.

Im übrigen ist das Verfahren das gleiche wie oben. Zunächst

ist aus den Gleichungen (4a) und (6a) die Spannungsänderung E_1 zu eliminieren; man erhält so für den Ausgleich kleiner Störungen die Differentialgleichung:

$$\left(1+\frac{L}{L_a}\right)\frac{d^2J_1}{dt^2}+\left(\frac{w}{l}+\frac{W}{L_a}+\frac{e'}{L_a}-\frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\frac{L}{E'}\right)\frac{dJ_1}{dt}$$
$$+\frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\left(1-\frac{e'}{E'}\right)J_1=0 \qquad (10)$$

und, da $1+\frac{L}{L_a}$ stets positiv ist, die Stabilitätsbedingungen

$$\frac{1}{L_a}(W+e')+\frac{w}{l}-\frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\frac{L}{E'}>0 \qquad (11)$$

und

$$\frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\left(1-\frac{e}{E'}\right)>0. \qquad (12)$$

Diskussion der Stabilitätsbedingungen.

a) Für den oberen, abfallenden Ast der statischen Charakteristik des Generators:

Hier ist

$$E'<0.$$

Daher wird in Gleichung (11) das letzte Glied: $-\frac{w}{l}\frac{W}{L_a}\frac{L}{E'}$ positiv und um so größer, je größer L ist; die Selbstinduktion L des Verbrauchers wirkt also günstig auf die Stabilität. Im ungünstigsten Fall ($L=0$) geht Gl. (11) über in

$$\frac{1}{L_a}(W+e')+\frac{w}{l}>0. \qquad (11a)$$

Gl. (12) läßt sich bei negativem E' schreiben:

$$e'-E'>0 \qquad (12a)$$

(Kriterium A). Da nach Gl. (5)

$$-E'=W\frac{w}{w-H'}>W \text{ (falls } W>0) \qquad (5a)$$

ist, so sind beide Bedingungen sicher erfüllt, wenn

$$e'+W>0 \qquad (13)$$

ist; die Stabilitätsverhältnisse sind also ähnlich, aber günstiger,

wie wenn der Verbraucher von einer konstanten Batterie durch den Vorschaltwiderstand W gespeist würde.

b) Für den unteren, ansteigenden Ast der Generatorcharakteristik ($E' > 0$):

Jetzt wird in Gl. (11) das letzte Glied negativ; Selbstinduktion des Verbrauchers ist also ungünstig für die Stabilität. Solange aber L nicht zu groß wird, wird die Summe der beiden letzten Glieder noch positiv sein; dann ist Bedingung (11) sicher erfüllt, solange Bedingung (13)

$$e' + W > 0$$

erfüllt ist.

Gleichung (12) geht bei positivem E' über in

$$E' - e' > 0 \tag{12b}$$

(umgekehrtes Kriterium A). Diese Bedingung ist, wie man aus Fig. 15 ohne weiteres sieht, praktisch stets erfüllt, bis auf den Ausnahmefall, daß die Verbrauchercharakteristik wesentlich steiler ansteigt als die Charakteristik eines konstanten Widerstandes.

Bei nicht zu großer Selbstinduktion L des Verbrauchers ist also auch auf dem unteren, ansteigenden Aste der Generatorcharakteristik Gl. (13) im allgemeinen eine hinreichende Stabilitätsbedingung; das oben im Anschluß an Gl. (13) Gesagte gilt demnach für die ganze statische Charakteristik der Nebenschlußmaschine.

Daraus folgt, daß man bei genügend großem W mit einem Nebenschlußgenerator einen Lichtbogen ohne Vorschaltwiderstand betreiben kann, und zwar an jeder Stelle der Maschinencharakteristik, solange nur Gl. (13) erfüllt ist. Das wurde durch den Versuch bestätigt; als Dynamomaschine diente eine 2 KW-Maschine für 110 Volt, der Lichtbogen wurde zwischen einer Dochtkohle von 20 mm Durchmesser (+) und einer Homogenkohle von 15 mm (—) erzeugt. Beim Zünden wurde vor den Lichtbogen ein Schieberrheostat vorgeschaltet; nach dem Einbrennen ließ sich dieser allmählich ganz ausschalten, ohne daß Labilität eintrat; der Lichtbogen brannte dann mit ca. 20 Ampere auf dem unteren Aste der Generatorcharakteristik. Der dem Betriebszustande entsprechende Punkt P (Fig. 17) liegt dabei an einer Stelle, an der nach dem Kriterium A starke Labilität zu erwarten wäre. Daß Punkt P wirklich auf dem ansteigenden unteren Aste der Generatorcharakteristik lag, ging daraus hervor, daß beim Verlängern des

Bogens (punktierte Lage II der Bogencharakteristik) die Stromstärke **stieg**, beim Verkürzen **sank** (!).

Praktisch hat dieser spezielle Versuch keine Bedeutung, weil auf dem unteren Aste der Charakteristik Leistung und Wirkungsgrad der Nebenschlußmaschine zu klein sind; wichtig ist dagegen die Tatsache, daß für den oberen, dem normalen Betriebe entsprechenden Ast die Stabilitätsbedingung (13) gilt, denn aus ihr folgt, daß ein Lichtbogen und natürlich auch eine Bogenlampe mit geeignetem Regelwerk (Nebenschlußlampe) ohne dauernd eingeschalteten Vorschaltwiderstand direkt von einem Nebenschlußgenerator gespeist werden kann. Diese Betriebsweise ist besonders ökonomisch, denn von dem scheinbaren Ankerwiderstande W, der hier an die Stelle des sonst nötigen Stabilisierungswiderstandes tritt, verbraucht nur der Bruchteil W_a, der wirkliche **Ohmsche** Ankerwiderstand, Energie, während in dem von der Ankerrückwirkung herrührenden Anteile W_r keine Energie vernichtet wird. W_r ist durchschnittlich etwa dreimal so groß wie W_a [1]); demnach wird bei gleicher Stabilität hier im Vorschaltwiderstande nur etwa ein Viertel der Energie vernichtet, die beim Betriebe mit konstanter Netzspannung vernichtet werden müßte. Daraus, daß im unteren ansteigenden Aste der Charakteristik Gleichung (12) praktisch stets erfüllt ist, folgt, daß hier Labilität häufig in Form von Pendelungen auftreten muß, namentlich immer dann, wenn die andere Stabilitätsbedingung (11) nahezu erfüllt ist. In der Tat wurden bei dem obigen Versuch mit dem Lichtbogen verschiedentlich solche Pendelungen beobachtet, deren Schwingungsdauer die Größenordnung einer Sekunde besaß.

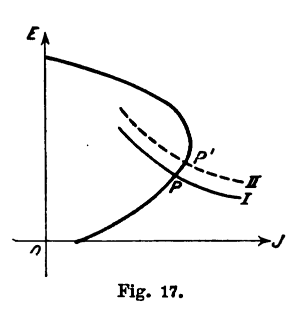


Fig. 17.

c) Mit gewisser Annäherung gilt die Betrachtung auch dann, wenn der Ankerstrom auf irgendeine andere Weise die Klemmenspannung beeinflußt, z. B. durch eine Compoundwicklung oder durch Hilfspole. Auch hier können wir, wenigstens in erster Annäherung, eine lineare Beziehung zwischen induzierter EMK. und Ankerstrom annehmen, es ändert sich somit in unseren Gleichungen nur die Größe W, und zwar kann W jetzt auch **negative** Be-

1) J. **Fischer-Hinnen**, Gleichstrommaschinen, 5. Aufl., Zürich 1904, S. 115, Anm.

träge annehmen (Übercompoundierung). Da aber im oberen Aste der Charakteristik — und nur der kommt hier in Frage —, $w - H'(i_0) > 0$ ist (das ergibt sich ohne weiteres aus der graphischen Konstruktion Fig. 16), so muß nach Gl. (5) W stets entgegengesetztes Vorzeichen wie E' haben; man überzeugt sich leicht, daß damit die Stabilitätsbedingungen die gleichen werden, wie die unter a) erhaltenen, nämlich:

$$\frac{1}{L_a}(W + e') + \frac{w}{l} > 0, \tag{11a}$$

(bei erheblichem Betrage von L nur hinreichend, nicht notwendig) und

$$e' - E' > 0 \tag{12a}$$

(Kriterium A).

Bei der Compoundmaschine ist entweder W negativ, dann ist in Analogie zu Gl. (5a) (S. 61) $W > -E'$; oder, falls W positiv ist, ist W und damit auch $-E'$ so klein, daß wenigstens $W + L_a \frac{w}{l} > -E'$ ist; daher ist bei der Compoundmaschine Bedingung (11a) stets erfüllt, wenn (12a) erfüllt ist; wir können also sagen:

Für eine Compoundmaschine, die einen Verbraucher mit Selbstinduktion speist, gilt das Stabilitätskriterium A.

Daher gelten die Überlegungen, die in § 2, D für den Hauptstromgenerator angestellt wurden, mutatis mutandis auch für die Compoundmaschine: sie eignet sich nicht zum Aufladen von Akkumulatoren und zu elektrolytischen Zwecken; zwei solche Maschinen dürfen nicht ohne weiteres einander parallel geschaltet werden, weil in beiden Fällen bei einer kleinen Übercompoundierung Labilität, d. h. Umpolarisieren, eintreten würde. Auch hier kann ein Parallelbetrieb durch eine Ausgleichsleitung ermöglicht werden.

Zu bemerken ist noch, daß, wie schon oben betont, die Theorie der Nebenschlußmaschine nur mit Annäherung auf die Compoundmaschine übertragen werden darf, weil bei Änderungen des Ankerstromes in den massiven Polschuhen und vor allem in der Nebenschlußwicklung sekundäre Ströme induziert werden, die bewirken, daß das Magnetfeld die Änderungen des Ankerstromes nicht sofort mitmacht. Eine genauere Durchrechnung des Problems unter

Berücksichtigung dieser induzierten Ströme zeigt, daß sie ungünstig auf die Stabilität einwirken, jedoch ist ihr Einfluß im allgemeinen gering.

Kapitel II.

Die Stabilität der stationären Bewegung rotierender Massen.

§ 8. Ableitung des Stabilitätskriteriums.

Außer dem Problem der elektrischen Stabilität, mit dem wir uns im ersten Kapitel beschäftigten, spielt in der Elektrotechnik ein zweites Stabilitätsproblem eine Rolle, das rein mechanischer Natur ist, und das wir jetzt behandeln wollen. Es sei dabei betont, daß das Problem in die Mechanik gehört und daß daher die Darlegungen dieses Paragraphen sich nicht auf elektrische Maschinen beschränken, sondern für Motore und Arbeitsmaschinen jeder Art gelten.

Es handelt sich um den Fall, daß ein rotierender Motor eine Arbeitsmaschine antreibt. Wir fragen: Erstens, welche stationären Betriebszustände sind möglich? Zweitens, sind diese möglichen Zustände stabil?

Zur Beantwortung dieser Fragen schreiben wir die Bewegungsgleichung des aus Motor und Arbeitsmaschine bestehenden Systems auf:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + m = M. \tag{1}$$

Darin bedeuten:

Θ das Trägheitsmoment des ganzen Systems,

ω seine Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Zahl der Umdrehungen in 2π Sekunden,

m das widerstehende Drehmoment der Arbeitsmaschine (kurz: Bremsmoment),

M das vom Motor ausgeübte Drehmoment,

t die Zeit.

M und m sind im allgemeinen Funktionen von ω, die entweder empirisch ermittelt oder aus der Theorie der betreffenden

Maschine abgeleitet werden können (vgl. die Beispiele in § 9). Wir setzen hier speziell voraus, daß M und m allein von ω abhängen.

Die Bedingung des gesuchten stationären Zustandes oder Gleichgewichtes ist die, daß der Zustand sich mit der Zeit nicht ändert $\left(\frac{d}{dt}=0\right)$; für diesen Fall gibt Gleichung (1)

$$m(\omega)=M(\omega). \tag{2}$$

Die Auflösung dieser Bestimmungsgleichung für die Gleichgewichtswerte von ω nehmen wir, genau wie die Auflösung der entsprechenden Gleichung des § 1, graphisch vor: Wir tragen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Fig. 18) M und m als Funktionen

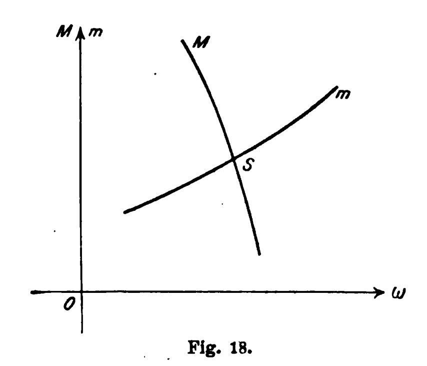


Fig. 18.

von ω auf und erhalten so zwei Kurven, die wir in Analogie zu den elektrischen Charakteristiken die mechanischen Charakteristiken des Motors und der Arbeitsmaschine nennen wollen. Dann ist die Lösung der Gleichung (2) gegeben durch den Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) S der beiden Charakteristiken $M(\omega)$ und $m(\omega)$; die Abszisse von S gibt die stationäre Drehzahl, die Ordinate das übertragene Drehmoment an. Wir bezeichnen diese Gleichgewichtswerte der Variablen ω, M und m mit dem Index 0; für sie gilt

$$m_0=m(\omega_0)=M_0=M(\omega_0). \tag{2a}$$

Um nun die Stabilität des durch S bestimmten Zustandes zu untersuchen, verfahren wir genau wie bei der Ableitung des elektrischen Stabilitätskriteriums in § 1: Wir untersuchen, wie sich das System in der Nähe des Gleichgewichtes verhält, nehmen also an, die

Variablen weichen um kleine Beträge ω_1, m_1, M_1 von ihren Gleichgewichtswerten ab, indem wir setzen

$$M = M_0 + M_1; \qquad m = m_0 + m_1; \qquad \omega = \omega_0 + \omega_1. \tag{3}$$

Jetzt gilt für das System die allgemeine Bewegungsgleichung (1); Einsetzung von (3) in (1) ergibt mit Rücksicht auf (2a)

$$\Theta \frac{d\omega_1}{dt} + m_1 = M_1. \tag{4}$$

Unter der Annahme, daß ω_1 so klein ist, daß in dem Intervall zwischen $\omega = \omega_0$ und $\omega = \omega_0 + \omega_1$ die beiden Charakteristiken als geradlinig angesehen werden können, wird

$$m_1 = \omega_1 \left(\frac{dm}{d\omega}\right)_{\omega = \omega_0} = \omega_1 m'(\omega_0) \tag{5}$$

$$M_1 = \omega_1 \left(\frac{dM}{d\omega}\right)_{\omega = \omega_0} = \omega_1 M'(\omega_0). \tag{6}$$

Einsetzung dieser Werte für m_1 und M_1 in Gl. (4) ergibt für den Ausgleich einer kleinen Störung ω_1 die Differentialgleichung

$$\Theta \frac{d\omega_1}{dt} + (m' - M')\,\omega_1 = 0. \tag{7}$$

Die Bedingung der Stabilität ist die, daß eine einmal vorhandene kleine Abweichung ω_1 im Laufe der Zeit verschwindet; dazu ist, wie in § 1 gezeigt, hinreichend und notwendig, daß der Koeffizient von ω_1

$$m'(\omega_0) - M'(\omega_0) > 0 \qquad \textbf{(Kriterium } B\textbf{)}$$

ist, da das Trägheitsmoment Θ stets positiv und endlich ist. Die Gleichung bildet das dem verallgemeinerten Kaufmannschen Kriterium (Kriterium A) vollkommen analoge mechanische Stabilitätskriterium; wir werden es im folgenden als „Kriterium B“ bezeichnen.

Die geometrische Bedeutung dieses Kriteriums ist genau die gleiche wie beim elektrischen Stabilitätskriterium:

Zur Stabilität ist hinreichend und notwendig, daß im Schnittpunkte S (Fig. 18) die Charakteristik m (ω) der Arbeitsmaschine steiler ansteigt als die Charakteristik M (ω) des Motors.

Zur Verdeutlichung sind in Fig. (19a) und (19b) die den Figg. (2a) und (2b) entsprechenden Diagramme gezeichnet, in denen diejenigen Winkelräume schraffiert sind, innerhalb deren in der

Nähe des Schnittpunktes S die Charakteristik $M(\omega)$ bei gegebener Charakteristik $m(\omega)$ nicht verlaufen darf (Fig. 19a), bzw. innerhalb deren $m(\omega)$ bei gegebenem $M(\omega)$ nicht verlaufen darf (Fig. 19b).

Praktisch liegen die Verhältnisse folgendermaßen:

Bei normaler Betriebsweise haben fast alle praktisch vorkommenden Motore eine abfallende Charakteristik, d. h. das ausgeübte Drehmoment nimmt mit wachsender Umdrehungszahl ab, etwa wie es die Kurve $M(\omega)$ in Fig. 19b zeigt. Das ist z. B. der Fall bei sämtlichen Gleichstrommotoren, beim Drehstrommotor (bei normaler Belastung) usw. Das Bremsmoment der Arbeitsmaschinen nimmt dagegen für gewöhnlich mit zunehmender Drehzahl zu, d. h. die Charakteristik $m(\omega)$ steigt im allgemeinen an.

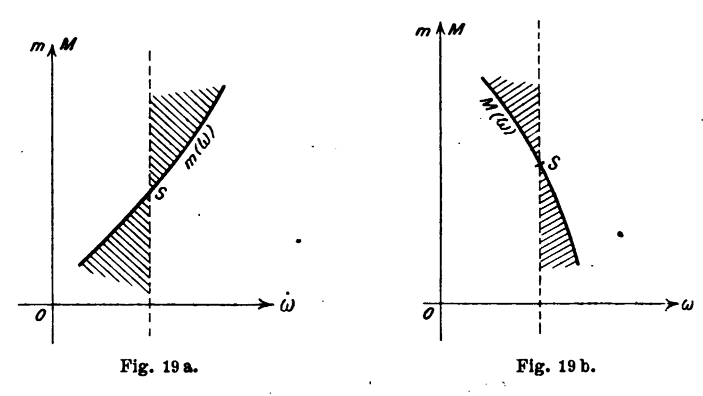


Fig. 19a. Fig. 19b.

Das kommt daher, daß das Bremsmoment der Arbeitsmaschinen entweder von Reibungswiderständen und ähnlichen Kräften herrührt, die mit der Geschwindigkeit zunehmen, oder, falls die Arbeitsmaschine ein elektrischer Generator ist, von elektromagnetischen Kräften, die dem vom Generator erzeugten Strome proportional sind; dieser ist aber proportional der Drehgeschwindigkeit, weil die EMK. des Generators ihr proportional ist. Der wichtigste Fall, in dem die m-Kurve nicht ansteigt, ist der der Bremsung durch Reibung fester Körper (z. B. Bremsung mit dem Pronyschen Zaum), bei dem m annähernd unabhängig von ω ist. Fälle, in denen die m-Kurve abfällt, lassen sich nur durch mehr oder weniger komplizierte Anordnungen realisieren; als Beispiel für eine solche Arbeitsmaschine sei genannt ein Wechselstromgenerator, der durch einen Resonanzkreis geschlossen ist, dessen Eigenschwingungszahl

etwas tiefer liegt, als die Frequenz des erzeugten Wechselstromes. Für gewöhnlich ist jedenfalls M abfallend und m ansteigend, und dann ist der Zustand stets stabil; Labilität haben wir nur in Ausnahmefällen zu erwarten.

Multiplizieren wir die Gleichung (1) auf beiden Seiten mit ω, so erhalten wir die Energiegleichung

$$\Theta\omega\frac{d\omega}{dt} + m\cdot\omega = M\cdot\omega$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Theta\omega^2\right) + a = A\,, \tag{8}$$

in der $a = \omega\cdot m$ die von der Arbeitsmaschine verbrauchte, $A = \omega\cdot M$ die vom Motor gelieferte Leistung und $T = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$ die in den trägen Massen aufgespeicherte Arbeit bedeuten; auch diese Gleichung könnten wir unserer Betrachtung zugrunde legen; wir müßten dann statt der mechanischen Charakteristiken die Leistungskurven $a = a(\omega)$ und $A = A(\omega)$ benutzen. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß man dann auf eine ganz analoge Stabilitätsbedingung geführt wird, wie das Kriterium B, nämlich

$$a'(\omega_0) - A'(\omega_0) > 0 \quad \text{für} \quad \omega_0 \geqq 0\,. \tag{9}$$

Für $\omega_0 = 0$ versagt dieses Stabilitätskriterium; für negatives ω_0 lautet es umgekehrt.

§ 9. Anwendungen des Kriteriums *B*.

A. Der Drehstrommotor. Die mechanische Charakteristik des Drehstrommotors ist eine Kurve von der in Fig. 21 gezeichneten Art.

a) Berechnung der mechanischen Charakteristik.

Für den Nichtelektrotechniker sei hier ganz kurz die Theorie des Drehstrommotors und die Berechnung der Charakteristik gegeben:

Charakteristisch für den Drehstrommotor ist das magnetische Drehfeld, das vom feststehenden Teil (Stator) erzeugt wird. In diesem Drehfelde rotiert ein in sich geschlossenes Leitersystem (Rotor), in dem durch Induktion Ströme erzeugt werden; von der Kraftwirkung, welche diese Ströme in dem magnetischen Felde erfahren, rührt das Drehmoment des Motors her.

Das vom Motor erzeugte Drehfeld ist bei konstanter Statorspannung und konstanter Frequenz konstant, d. h. unabhängig vom Rotorstrom; denn der an die Statorwicklung angelegten Spannung wird das Gleichgewicht

gehalten wesentlich nur durch die vom Drehfeld in der Wicklung induzierten Spannung (der durch den Ohmschen Widerstand bedingte Spannungsabfall ist praktisch zu vernachlässigen); diese Spannung muß konstant sein, also auch das sie erzeugende Drehfeld. Das bedeutet, daß das vom Rotorstrom erzeugte Feld stets durch ein zusätzliches Statorfeld kompensiert wird; je größer der Rotorstrom ist, um so stärker wird auch der Statorstrom.

Zur Berechnung des Drehmomentes betrachten wir einen möglichst einfachen Motor[1]); das Drehfeld sei zweipolig und homogen, wie es für einen bestimmten Augenblick in Fig. 20 dargestellt ist; der Rotor bestehe aus N in sich kurz geschlossenen Drahtrechtecken, deren Ebenen durch die Rotorachse gehen. Eins von ihnen ist im Querschnitt (Fig. 20) durch die beiden Punkte $a\,a$ angedeutet, in denen die Drähte die Papierebene schneiden; im ganzen sind also $2\,N$ solcher Drähte gleichmäßig über den Rotorumfang verteilt.

Ist ν die Periodenzahl des Wechselstromes in $2\,\pi$ Sekunden, so ist die Winkelgeschwindigkeit des Drehfeldes ebenfalls $= \nu$. Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors sei $(1 - s)\,\nu$, also seine Relativgeschwindigkeit gegen das Drehfeld $s\,\nu$; s heißt die „Schlüpfung“ des Rotors.

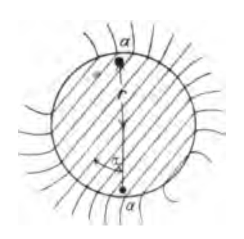


Fig. 20.

Sowohl für die elektrodynamische Induktion wie auch für die Kraftwirkung kommt nur die radiale Komponente des Magnetfeldes an den Stellen a in Betracht; ist die Feldstärke gleich $\mathfrak{H}_0$, so wird jene Komponente $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \cdot \cos\alpha$, wenn α der Winkel zwischen der Rechteckebene und der Feldrichtung ist. Da die Relativgeschwindigkeit des Rotors gegen das Feld gleich $s\,\nu$ ist, ändert sich α nach dem Gesetz

$$\alpha = s\,\nu\,t,$$

also wird

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \cos s\,\nu\,t.$$

Die Drähte a schneiden Kraftlinien mit der Geschwindigkeit $r\,s\,\nu$; dadurch wird in ihnen eine EMK. induziert von der Größe

$$E = r\,s\,\nu\,l\,\mathfrak{H} = r\,l\,s\,\nu\,\mathfrak{H}_0 \cos s\,\nu\,t,$$

wenn r die Entfernung des Drahtes von der Achse und l die gesamte im Felde liegende Länge eines Rechtecks ist. Ist W der Widerstand und L die Selbstinduktion des Rechtecks[2]), so erzeugt diese EMK. nach den bekannten Wechselstromgesetzen einen Strom

---

1) Es ist plausibel und soll hier nicht weiter bewiesen werden, daß für alle anderen Drehstrommotore die gleichen Gesetze gelten, wenn man nur für die in den Formeln auftretenden Motorkonstanten die richtigen Werte einsetzt.

2) Zu beachten ist, daß diese Selbstinduktion nicht von dem ganzen vom Rotorstrom erzeugten Magnetfelde herrührt, sondern nur von dem Anteil, dessen Kraftlinien sich nicht durch die Statorwindungen schließen, d. h. nur vom sog. „Streufluß“; denn der übrige (weitaus größte) Teil wird nach dem oben Gesagten automatisch durch eine entsprechende Vergrößerung des Statorstromes kompensiert, und ist schon dadurch berücksichtigt, daß wir die Stärke des Drehfeldes als konstant angenommen haben.

$$J = \frac{rls\nu\mathfrak{H}_0}{\sqrt{W^2 + s^2\nu^2L^2}}\cos(s\nu t - \varphi)$$

wobei

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Ls\nu}{W}$$

ist, und der von diesem Strom durchflossene Leiter erfährt im Felde $\mathfrak{H}$ ein Drehmoment von der Größe

$$M = Jlr\mathfrak{H} = \frac{s\nu r^2 l^2 \mathfrak{H}_0^2}{\sqrt{W^2 + s^2\nu^2L^2}}\cos s\nu t\cos(s\nu t - \varphi).$$

Uns kommt es hier nur auf den zeitlichen Mittelwert $\overline{M}$ an; für das Cosinusprodukt ist der gleich

$$\overline{\cos s\nu t \cdot \cos(s\nu t - \varphi)} = \cos\varphi \cdot \overline{\cos^2 s\nu t} = \frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{W}{\sqrt{W^2 + s^2\nu^2L^2}},$$

also wird

$$\overline{M} = \frac{1}{2}\frac{s\nu W r^2 l^2 \mathfrak{H}_0^2}{W^2 + s^2\nu^2L^2} = \frac{1}{2}r^2l^2\mathfrak{H}_0^2\frac{1}{L}\frac{s\frac{L\nu}{W}}{1 + s^2\frac{L^2\nu^2}{W^2}}.$$

Um das gesamte Drehmoment zu erhalten, ist dieser Ausdruck noch mit der Anzahl N der Rechtecke zu multiplizieren. Während das auf das einzelne Rechteck ausgeübte Drehmoment entsprechend den Oszillationen der Funktion $\cos s\nu t \cdot \cos(s\nu t - \varphi)$ oszilliert, ist das bei dem Gesamtdrehmoment nicht mehr der Fall, weil die Phase der Oszillationen bei den einzelnen Rechtecken entsprechend ihrer örtlichen Versetzung verschoben ist; beim Gesamtdrehmoment können wir also das Mittelwertzeichen weglassen. Falls, wie wir es hier voraussetzen, Statorspannung und Frequenz konstant sind, ist $\mathfrak{H}_0$ eine Konstante, ebenso sind r, l und N für einen gegebenen Motor konstant; L und W lassen sich dagegen durch Einschalten von Widerstand oder Selbstinduktion in den Rotor ändern. L und W treten zweimal in der Verbindung

$$\frac{L\nu}{W} = \operatorname{tg}\psi$$

auf; ψ stellt den Phasenwinkel zwischen EMK. und Strom im Rotor bei der Schlüpfung $s = 1$, d. h. bei Stillstand des Motors dar. Fassen wir die Konstanten N, r, l, $\mathfrak{H}_0$ zusammen zu

$$C = \frac{1}{2}Nr^2l^2\mathfrak{H}_0^2,$$

so wird das gesamte Drehmoment

$$M = C \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{s\operatorname{tg}\psi}{1 + s^2\operatorname{tg}^2\psi}. \tag{1}$$

Für sehr kleines L schreiben wir besser (da die letzte Formel für $L = 0$ versagt):

$$M = C'\frac{1}{W}\frac{s}{1 + s^2\operatorname{tg}^2\psi}, \tag{1a}$$

wobei $C' = C\nu$ gesetzt ist.

Da der Wirkungsgrad eines Drehstrommotors um so größer ist, je kleiner die Schlüpfung ist, arbeiten die technischen Motore bei normalem Betriebe immer mit sehr kleiner Schlüpfung s. In diesem Falle kann man in erster

Annäherung in den Formeln (1) und (1a) im Nenner das Glied $s^2 \mathrm{tg}^2 \psi$ gegen 1 vernachlässigen; bei normalem Betriebe ist daher das Drehmoment des Drehstrommotors annähernd proportional der Schlüpfung s.

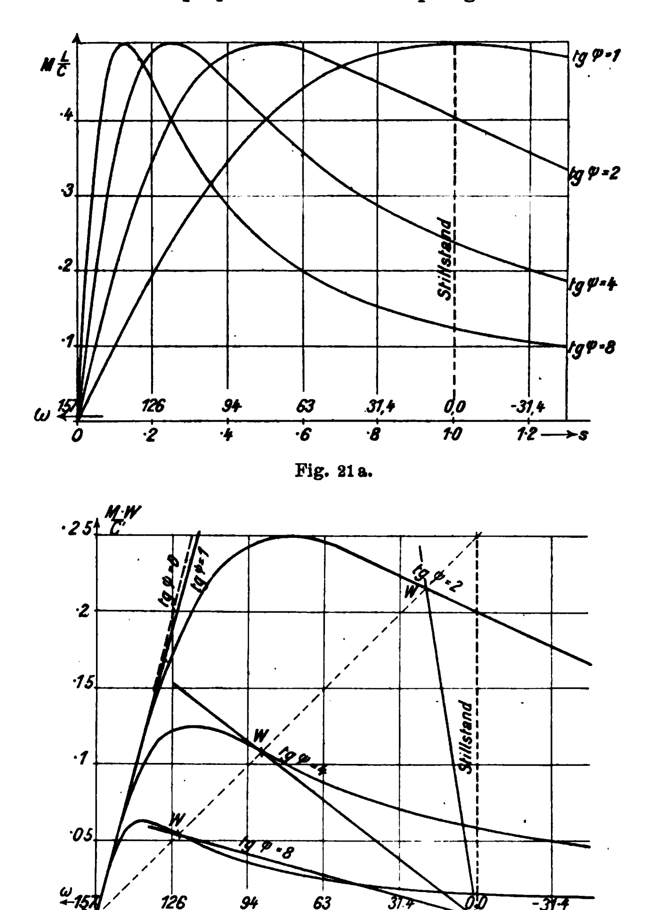


Fig. 21a.

Fig. 21b.

Wir hier wollen aber die Stabilität längs der **ganzen** Charakteristik des Motors untersuchen und müssen deshalb die strengen Formeln benutzen. Ihre graphische Darstellung ist in den Figg. (21a) und (21b) gegeben. Fig. 21a[1]) zeigt M als Funktion von s für verschiedene $\mathrm{tg}\psi$ bei konstant gehaltenem L, d. h. bei verschiedenen Rotorwiderständen W. Aus Gleichung (1) folgt, daß

1) Ähnliche Kurven z. B. bei Steinmetz: Theoretische Grundlagen der Starkstromtechnik, Braunschweig 1903, S. 282.

dann M nur von $s \cdot \mathrm{tg}\,\psi$ abhängt; haben wir also die Kurve $M(s)$ für ein bestimmtes $\psi\,(\psi_1)$ gezeichnet, so ergeben sich die Kurven für ein anderes $\psi\,(\psi_2)$ durch Verlängerung oder Verkürzung der Abszissen im Verhältnis $\frac{\mathrm{tg}\,\psi_1}{\mathrm{tg}\,\psi_2}$.

Fig. 21b zeigt dieselben Kurven für konstant gehaltenes W und verschiedene $\mathrm{tg}\,\psi$, also für verschiedene Rotorselbstinduktionen L. Schreibt man Gleichung (1a) in der Form

$$M \cdot \mathrm{tg}\,\psi = \frac{C'}{W} \cdot \frac{s\,\mathrm{tg}\,\psi}{1 + s^2 \mathrm{tg}^2 \psi},$$

so sieht man, daß man die Kurven für verschiedene $\mathrm{tg}\,\psi$ erhält, indem man Abszissen und Ordinaten im Verhältnis $\frac{\mathrm{tg}\,\psi_1}{\mathrm{tg}\,\psi_2}$ verändert; die einzelnen Kurven werden also einander ähnlich.

Nimmt man in Fig. (21a) und (21b) die Abszisse $s = 1$ zum Koordinatennullpunkt, zählt die Abszissen nach links positiv und multipliziert ihren Maßstab noch mit ν[1]), so geben uns die gezeichneten Kurven M als Funktion von $(1 - s)\,\nu = \omega$, d. h. direkt die mechanischen Charakteristiken des Motors.

Bei wirklich ausgeführten, größeren technischen Motoren ist $\mathrm{tg}\,\psi$ ziemlich groß, so daß die Charakteristik ähnlich der für $\mathrm{tg}\,\psi = 8$ gezeichneten Kurve verläuft.

b) Anwendung des Stabilitätskriteriums B.

In dem Diagramm Fig. 22 stellt, wie bisher, die Kurve M die Motorcharakteristik dar, m die Charakteristik der von ihm angetriebenen Arbeitsmaschine. Die Figur zeigt, daß im allgemeinen mindestens 2 Schnittpunkte, S_1 und S_2, sich ergeben, von denen S_1 stabil, S_2 labil ist. Der Motor kann also nur im Punkte S_1 betrieben werden. Ist die Drehzahl kleiner, als dem labilen Schnittpunkte S_2 entspricht, so nimmt sie dauernd ab; links von S_2 kann daher die Umdrehungszahl nicht von selber zunehmen, d. h. der Motor kann nicht mit Belastung anlaufen. Falls doch Anlauf bei Belastung mit einer Arbeitsmaschine mit der Charakteristik m verlangt wird, muß man die Charakteristik M so verändern, daß der Schnittpunkt S_2 nach links bis über die Ordinatenachse hinausgeschoben wird, und das läßt sich nach Fig. 21a durch Verkleinerung von $\mathrm{tg}\,\psi$ bei konstantem L, d. h. durch Vergrößerung von W erreichen. Deshalb schaltet man zum Anlauf unter Last einen „Anlaßwiderstand" in den Rotorkreis; dadurch erhält man eine Charakteristik nach Art von M_a (Fig. 22), bei der das Maximum des Drehmomentes den gleichen Betrag hat, wie bei der ursprünglichen Charakteristik, aber nach links verschoben ist.

---

1) In den Figuren ist als Periodenzahl 25, also $\nu = 157$ angenommen.

Belasten wir den Motor stärker, als der normalen Belastung (m, Fig. 23) entspricht, d. h. mit einer Arbeitsmaschine mit höherer Charakteristik, so rücken S_1 und S_2 näher aneinander; berührt die Kurve m die Motorcharakteristik M, so fallen S_1 und S_2 zusammen (punktierte Kurve m_1, Berührungspunkt S_3). Hier ist das Gleichgewicht indifferent; bei noch stärkeren Belastungen ist überhaupt kein Gleichgewichtszustand möglich, der Motor bleibt stehen. Der Punkt S_3 entspricht also der minimalen Drehzahl, mit der der Motor unter den gegebenen Verhältnissen betrieben werden kann. Aus der Figur ist ersichtlich, daß die Lage dieses „kritischen Punktes" S_3, also das Minimum der Drehzahl, vom Verlauf der Charakteristik m abhängt; der kritische

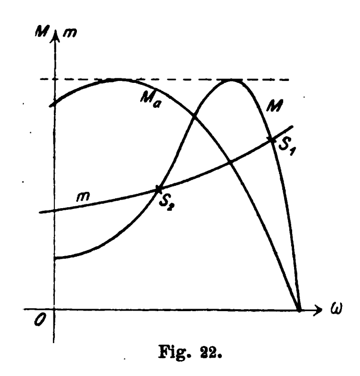


Fig. 22.

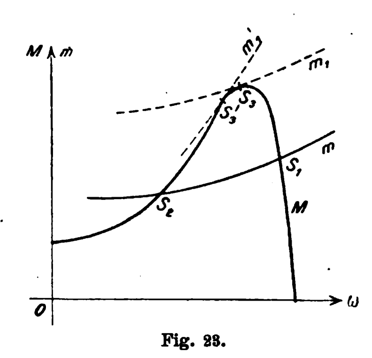


Fig. 23.

Punkt liegt um so weiter nach links, die kritische Drehzahl ist also um so kleiner, je steiler die Charakteristik m ist. (Punkt S_3' in Fig. 23.)

In elektrotechnischen Lehrbüchern[1]) wird vielfach die Ansicht ausgesprochen, daß alle Zustände links vom Maximum der Charakteristik M labil, alle rechts davon stabil seien, daß also der kritische Punkt mit dem Maximum von M zusammenfalle. Nach dem Vorstehenden ist das im allgemeinen nur annähernd richtig; streng gilt es nur dann, wenn die Kurve m parallel zur Abszissenachse verläuft, d. h. wenn das Bremsmoment der Arbeitsmaschine unabhängig von der Drehzahl ist. In Wirklichkeit ist das fast nie der Fall; namentlich in dem für die Elektrotechnik wichtigen Falle, daß die Arbeitsmaschine ein durch einen konstanten Wider-

1) Vgl. z. B. Benischke, Die asynchronen Drehstrommotoren, Braunschweig 1904, S. 23.

stand w_1 (z. B. Glühlampen) geschlossener elektrischer Generator ist, steigt m stark, nämlich nahezu proportional mit ω an. Denn bei konstanter Erregung ist das Bremsmoment proportional dem Ankerstrom, dieser proportional der EMK., die ihrerseits der Drehzahl proportional ist. Hinzu kommt noch das (annähernd konstante) Bremsmoment der Reibungskräfte, so daß die m-Kurve eine gerade Linie wird, welche die Ordinatenachse oberhalb des Nullpunktes schneidet. Die Neigung dieser Geraden kann bei einer gegebenen Maschine durch Änderung von w_1 verändert werden: Da der Strom cet. par. umgekehrt proportional dem Gesamtwiderstande ist, ist es auch das Bremsmoment m; die Charakteristik ist also um so steiler, je kleiner w_1 ist.

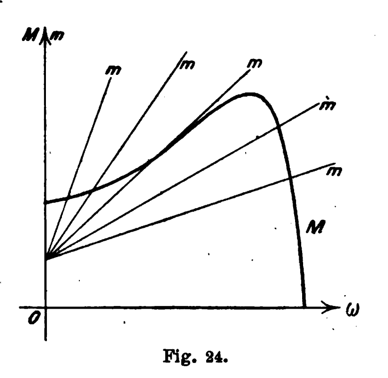


Fig. 24.

Mit solchen steilen Charakteristiken der Arbeitsmaschine lassen sich häufig sogar alle Punkte der Charakteristik M realisieren (Fig. 24).

c) Versuche.

Den entsprechenden Versuch — der beiläufig in der Vorlesung oder im Praktikum dazu dienen kann, die mechanische Charakteristik des Drehstrommotors zu demonstrieren[1]) — habe ich mit einem kleinen vierpoligen Drehstrommotor mit Schleifringanker von $^1/_2$ PS. ausgeführt, der mit einer fremderregten Dynamomaschine (Nebenschlußmotor 220 Volt, $^1/_3$ PS.) direkt gekuppelt wurde. Deren Bürsten wurden durch einen Rheostaten vom Widerstande w_1 geschlossen, im Schließungskreise lag ein Strommesser, die Bürsten waren mit einem Spannungsmesser verbunden. Um die Messung möglichst bequem zu gestalten, wollen wir das übertragene Drehmoment in geeigneter Weise definieren; wir wollen nämlich nur den Anteil des Bremsmomentes m in Betracht ziehen, der von dem im Strommesser gemessenen Strome J herrührt. Nicht berücksichtigt wird also der Anteil, der infolge von Reibung, Hysteresis und Wirbelströmen in der Dynamomaschine auftritt.

1) Ähnlich G. Brion, Leitfaden zum elektrotechnischen Praktikum, Leipzig 1910, S. 358.

Das ist vollkommen zulässig, wenn wir diese Widerstände als im Motor, nicht in der Arbeitsmaschine auftretend ansehen; wir müssen gewissermaßen die Welle und das Ankereisen der Dynamomaschine noch als Teile des Motors ansehen, also die Grenze von Motor und Arbeitsmaschine (die Kupplung) uns zwischen Ankerdrähten und Ankereisen denken. Die Motorcharakteristik M wird dadurch zwar um die Verlustbremsmomente der Arbeitsmaschine zu niedrig herauskommen, aber auf diese modifizierte Charakteristik können wir unsere Stabilitätsbetrachtung doch in voller Strenge anwenden.

Auf diese Weise erreichen wir den Vorteil, das übertragene Drehmoment sehr bequem messen zu können, nämlich auf rein elektrischem Wege durch Messung des Stromes J. Denn wenn der magnetische Induktionsfluß der Dynamomaschine (kurz: das Magnetfeld) unabhängig vom Ankerstrom J ist, d. h. wenn die Ankerrückwirkung zu vernachlässigen ist, so ist das Bremsmoment

$$m = a \cdot J, \tag{2}$$

wobei a eine nur von den Maschinendimensionen und vom Magnetfelde abhängige, für uns unwesentliche Konstante ist. Daß die Ankerrückwirkung hier wirklich zu vernachlässigen war, wurde durch einen besonderen Versuch festgestellt; es wurde daran erkannt, daß bei konstanter Drehzahl die EMK. der Maschine

$$E = e + J w_a$$

(e = Klemmenspannung, w_a = Ankerwiderstand)

unabhängig vom Strome J war.

Auch die Winkelgeschwindigkeit ω des Aggregates wurde auf elektrischem Wege bestimmt; setzen wir wieder, wie oben, voraus, daß die Ankerrückwirkung zu vernachlässigen ist, so muß die induzierte EMK. der Dynamomaschine proportional der Umdrehungszahl bezw. der Winkelgeschwindigkeit sein, also auch umgekehrt die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = b \cdot E = b \cdot (e + J w_a) \tag{3}$$

sein, wobei b wieder eine unwesentliche Konstante ist, die übrigens gleich $\frac{1}{a}$ ist; das sieht man ohne weiteres aus der Energiegleichung

$$m \cdot \omega = E \cdot J,$$

also

$$\frac{m}{J} = a = \frac{E}{\omega} = \frac{1}{b}. \tag{4}$$

Ein weiterer Vorteil unserer vereinfachenden Festsetzung über das Drehmoment ist der, daß wir jetzt den Verlauf der Charakteristiken m vorhersagen können; da nämlich

$$J = \frac{E}{w_a + w_1} = \frac{a\omega}{w_a + w_1} \tag{5}$$

ist, wird

$$m = aJ = \frac{a^2}{w_a + w_1} \cdot \omega = \frac{a^2}{w} \omega \tag{6}$$

($w = w_a + w_1$ ist der gesamte Widerstand des aus Dynamoanker und Schließungswiderstand w_1 gebildeten Kreises). Bei konstantem äußeren Schließungswiderstande w_1 ist also die m-Kurve eine durch den Ursprung gehende Gerade, und es genügt die Bestimmung eines Punktes der Charakteristik, um die ganze Kurve zeichnen zu können.

Damit gestaltet sich die Aufnahme der Charakteristiken M und m sehr einfach: wir messen für eine Reihe von Schließungswiderständen w_1 beim stationären Zustande Strom J und Klemmenspannung e der Dynamomaschine und berechnen daraus nach Gleichung (2) und (3) Bremsmoment m und Drehgeschwindigkeit ω; da wir bei Gleichgewichtszuständen messen, muß $M = m$ sein. Tragen wir zusammengehörige Werte von $M = m$ und ω in einem Diagramm auf, so bekommen wir die mechanische Charakteristik M des Motors. Die zu jedem Punkte von M gehörige Charakteristik m brauchen wir nicht erst aufzunehmen; wir erhalten sie nach Gl. (6) ohne weiteres, wenn wir durch den betreffenden Punkt und den Nullpunkt eine Gerade ziehen.

Auf den Maßstab, in dem wir m und ω auftragen, kommt es nicht an; wir wollen daher statt m und ω die ihnen proportionalen Größen

$$J = \frac{m}{a} \qquad \text{und} \qquad E = a\omega$$

auftragen.

Falls wir zu einem bestimmten Punkte der Charakteristik M eine steilere Charakteristik m haben wollen, so können wir das dadurch erreichen, daß wir die Dynamomaschine durch einen passenden Widerstand eine Akkumulatorenbatterie von der EMK. E_0 aufladen lassen, denn dann wird

$$J = \frac{E - E_0}{w_1 + w_a} = \frac{E - E_0}{w}.$$

Die Charakteristiken m werden also wieder gerade Linien, die aber nicht durch den Nullpunkt gehen, sondern die Abszissenachse im Punkte $E = E_0$ schneiden (Fig. 25).

Der erste ausgeführte Versuch, bei dem die Schleifbürsten des Drehstrommotors kurzgeschlossen waren, ergab als Charakteristik M die mit I bezeichnete Kurve der Fig. 26. Die Charakteristik weicht wesentlich von der unseren bisherigen Überlegungen zugrunde liegenden Charakteristik des normalen Drehstrommotors (Fig. 22—25)

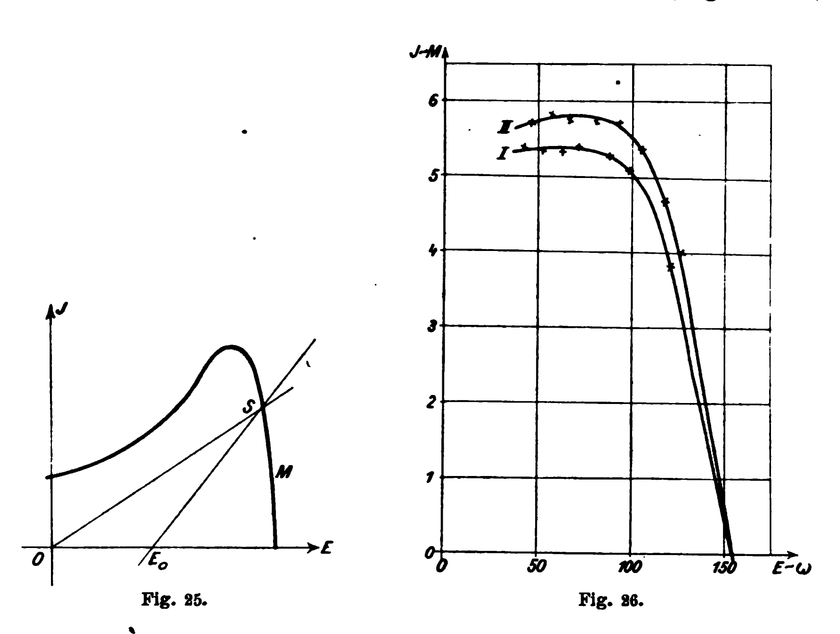


Fig. 25. Fig. 26.

ab; ein Vergleich mit den Figg. 21 lehrt, daß bei unserem Motor $\operatorname{tg} \psi = \frac{Lv}{W}$ zu klein ist. Wir müssen daher entweder W verkleinern oder L vergrößern. Ersteres geht nicht; höchstens lassen sich die Übergangswiderstände der Bürsten vermeiden, indem man die Schleifringe direkt kurz schließt; die auf diese Weise erhaltene Kurve II (Fig. 26) zeigt aber nur geringe Veränderung gegen Kurve I. Wir müssen also L vergrößern; zu diesem Zwecke habe ich die Rotorbürsten durch drei Spulen mit Eisenkernen in Dreieckschaltung verbunden. Die Schar von Charakteristiken, die man auf diese Weise erhalten kann, stimmt im wesentlichen mit der in Fig. 21b gezeichneten Schar überein, wenn man von der Wider-

standserhöhung absieht, die durch den zusätzlichen Widerstand der Selbstinduktionsspulen hineinkommt. Von den mit verschiedenen Spulen erhaltenen Charakteristiken ist eine besonders geeignete in Fig. 27 wiedergegeben. Zieht man vom Koordinaten-Nullpunkte aus die beiden Tangenten an die Kurve, so folgt aus unseren Überlegungen, daß die zwischen den Berührungspunkten *a* und *b* liegenden Kurvenpunkte labilen Zuständen entsprechen müssen, falls die Belastungsdynamo durch einen Widerstand geschlossen ist, die Charakteristiken *m* also gerade Linien durch den Nullpunkt sind.

Das wurde durch den Versuch bestätigt; wurde der Schließungswiderstand der Dynamomaschine unter den dem Punkte *b* entsprechenden Wert von etwa 125 Ω herabgesetzt, so sank die Umdrehungszahl des Aggegrats erst langsam, dann schneller bis auf etwa den halben Wert, entsprechend einer Abnahme der EMK. von ca. 115 Volt auf 57 Volt (Punkt c). Wurde jetzt der Schließungswiderstand wieder erhöht, so ließen sich noch die zwischen den Punkten *c* und *a* liegenden Betriebszustände realisieren; sobald aber der dem Punkte *a* entsprechende Widerstandswert erreicht war, begann die Umdrehungszahl zuzunehmen bis zum Punkte *d*. Die zwischen *a* und *b* liegenden Punkte waren also in Übereinstimmung mit unserer Voraussage nicht durch stationäre Betriebszustände zu realisieren. Jedoch gelang die Verwirklichung dieser Zustände ohne Schwierigkeit, wenn ich die Charakteristik *m* steiler machte dadurch, daß ich von der Dynamomaschine eine Akkumulatorenbatterie von 60 Volt laden ließ, so daß die Charakteristiken *m* die Abszissenachse im Punkte $E = 60$ Volt schnitten. Das Diagramm läßt das erwarten, denn diese Geraden schneiden die Charakteristik *M* so, wie es stabilen Zuständen entspricht.

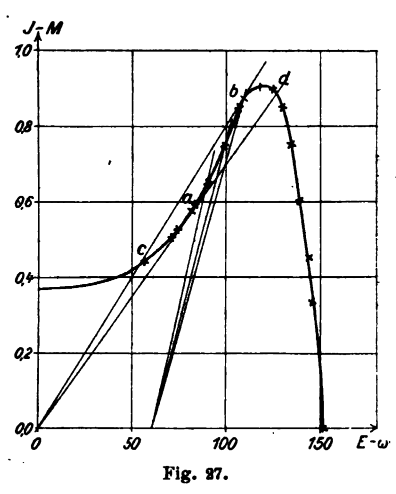


Fig. 27.

Hervorgehoben sei noch, daß bei der ersten Schaltung (Dynamomaschine nur durch einen Widerstand geschlossen) nach der Theorie alle Betriebszustände links vom Punkte *a* stabil

sind; tatsächlich ließen sich diese Punkte auch bis hinab zu den kleinsten Drehzahlen realisieren; so z. B. gelang es, Umdrehungszahlen bis unter 50 pro Minute, d. h. bis zu $^1/_{30}$ der synchronen Drehzahl, zu erreichen.

B. Der Einphaseninduktionsmotor. Den Einphaseninduktionsmotor erhält man, wenn man bei einem Zweiphasen-Drehfeldmotor die eine Phase der Statorwicklung wegläßt. Die Theorie ist hier wesentlich komplizierter. Zur anschaulichsten Darstellung derselben gelangt man wohl, wenn man nach dem Vorgange von Ferraris das Wechselfeld in zwei gleich starke, mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetztem Sinne rotierende Drehfelder zerlegt, so wie es aus der Theorie der optischen Aktivität bekannt ist. Man darf aber diese Zerlegung nicht auf das Feld des magnetischen Induktionsflusses anwenden, sondern nur auf das der vom Stator erzeugten magnetomotorischen Kraft, denn nur von dieser wissen wir ja, daß sie ein reines Wechselfeld bildet, während über das Feld des magnetischen Flusses nichts weiter bekannt ist, als daß seine Komponente in Richtung der Statorpole durch die angelegte Wechselspannung bestimmt ist. Diese richtige Zerlegung ist wohl zuerst von Eichberg[1]) durchgeführt worden; er hat gezeigt, daß diese Zerlegung darauf hinaus kommt, den Einphaseninduktionsmotor zu ersetzen durch zwei gekuppelte, gleiche Drehfeldmotore, deren Drehfelder in entgegengesetztem Sinne umlaufen und deren Statorwicklungen hintereinander geschaltet sind. Die beiden Motore arbeiten also einander entgegen; bei Stillstand müssen aus Symmetriegründen die beiden entgegengerichteten Drehmomente gleich, das resultierende Drehmoment also null sein. Wird das System nun von außen in Drehung versetzt, so steigt nach der Charakteristik (z. B. Fig. 21a, $\operatorname{tg}\psi = 8$) das Drehmoment desjenigen der beiden Motore, der im Sinne seines Drehfeldes gedreht wird, während das des anderen sinkt; d. h. das Aggregat entwickelt ein Drehmoment in dem Sinne, daß es Arbeit nach außen abgibt. Dieses Drehmoment wächst mit steigender Drehzahl, einmal wegen des Verlaufes der beiden Charakteristiken, dann auch, wie Eichberg gezeigt hat, deshalb, weil mit zunehmender Drehzahl der im Sinne seines Drehfeldes laufende Motor (der „Arbeitsmotor") immer mehr, der andere (der „Bremsmotor") immer weniger Spannung aufnimmt; in

1) Eichberg, Elektrot. ZS. 21, 484, 1900.

der Nähe des Synchronismus (beim normalen Betrieb) ist die vom Bremsmotor aufgenommene Spannung so klein, daß er nur wie ein dem Arbeitsmotor vorgeschalteter, relativ kleiner, induktiver Widerstand wirkt; das entgegengesetzte Drehmoment kann hier vernachlässigt werden. Daher verhält sich der Einphasenmotor in der Nähe des Synchronismus fast genau wie ein Mehrphasenmotor. Dieses Ergebnis genügt in Verbindung mit dem oben erhaltenen Resultat, daß bei der Drehgeschwindigkeit null das Drehmoment null ist und daß der Motor aus Symmetriegründen in beiden Drehrichtungen Arbeit leisten kann, dazu, den allgemeinen Verlauf der Charakteristik zu zeichnen (M, Fig. 28).

Wir wollen an Hand dieser Charakteristik mit Hilfe unseres Stabilitätskriteriums das Anlaufen des unbelasteten Motors unter-

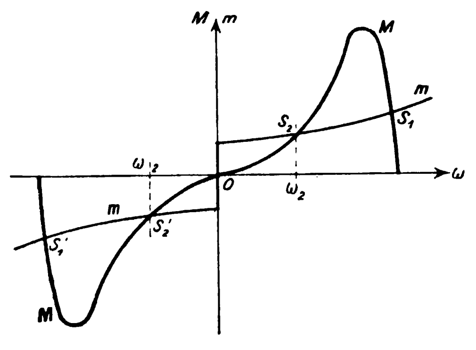


Fig. 28.

suchen. Wir wollen aber hier das treibende Drehmoment M und das Bremsmoment m etwas anders definieren als wir es beim Drehstrommotor getan haben (S. 75/76); wir wollen hier unter M nur den von den Strömen in den Stator- und Rotordrähten herrührenden Anteil verstehen; die Reibungs- etc. Verluste wollen wir also als in der Arbeitsmaschine, nicht im Motor auftretend ansehen; hier (bei Leerlauf) liefern diese Verluste allein das Bremsmoment m. Wir betrachten also als Arbeitsmaschine gewissermaßen die Lager und das Ankereisen des Motors; die entsprechende Charakteristik m ist in Fig. 28 gezeichnet. Sie schneidet die Charakteristik M in 5 Punkten: S_1, S_2, O, S_2', S_1'. Davon sind stabil: O[1]), S_1, S_1',

1) Auf den Punkt O läßt sich unser Stabilitätskriterium B nicht ohne weiteres anwenden, weil dort die Kurve m unstetig ist. Man kann aber die

während S_2 und S_2' labil sind. Aus der Stabilität des Ruhezustandes O folgt, daß der Motor überhaupt nicht von selbst anlaufen kann; erst wenn man seine Umdrehungszahl von außen her auf irgendeine Weise auf einen Betrag bringt, der größer ist als die dem labilen Punkte S_2 oder S_2' entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit ω_2, kann seine Drehzahl von selber weiter zunehmen bis zum stabilen Punkte S_1 bezw. S_1'. Dieser „kritische" Wert ω_2 hängt vom Verlaufe der Charakteristik m ab und ist um so kleiner, je tiefer m liegt; bei Belastung des Motors wird also die kritische Drehzahl größer.

Der vorhin besprochene Fall, daß der Motor bei beliebig kleinen Umdrehungszahlen stabil läuft, kann hier nicht eintreten.

Schließlich sei noch

C. Eine allgemeine Betrachtung angeschlossen. In der Technik ist es häufig erwünscht, eine Arbeitsmaschine mit möglichst konstanter, vom Kraftverbrauch unabhängiger Umdrehungsgeschwindigkeit zu betreiben. Für solche Zwecke wäre vorteilhaft ein Motor, dessen Umdrehungsgeschwindigkeit unabhängig vom abgegebenen Drehmoment, dessen Charakteristik also eine zur Ordinatenachse parallele Gerade wäre. Erfolgt die Energieübertragung vom Motor zur Arbeitsmaschine durch einen Treibriemen, so wäre wegen der mit steigender Belastung zunehmenden Riemengleitung ein Motor erwünscht, dessen Umdrehungszahl mit steigendem Bremsmoment ein wenig zunimmt, wie es die in Fig. 29 gezeichnete Charakteristik M darstellt. Was sagt nun unser Stabilitätskriterium über Motore mit solcher Charakteristik aus?

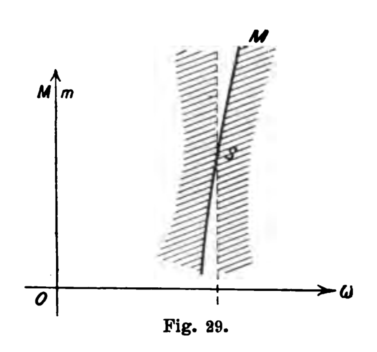


Fig. 29.

Markieren wir nach Analogie von Fig. 19b für einen bestimmten Betriebszustand S das Gebiet, in dem die Charakteristik m nicht

---

Betrachtung des § 8 leicht auf den vorliegenden Fall übertragen, man muß dann nur darauf verzichten, die Änderungen m_1 und M_1 der Drehmomente durch die Änderung ω_1 der Drehzahl auszudrücken, sondern man muß diese Änderungen direkt den Charakteristiken Fig. 28 entnehmen. Dann ergibt sich sofort die Stabilität von O, weil bei jeder genügend kleinen Änderung ω_1 m über M überwiegt, der Motor also gebremst wird.

verlaufen darf, durch Schraffur, so ergibt sich das Bild der Fig. 29: die Charakteriken *m*, die stabilen Zuständen entsprechen, sind auf einen so kleinen Winkel — den nicht schraffierten Raum in Fig. 29 — beschränkt, daß wir sagen können: praktisch werden sich mit einem solchen Motor überhaupt keine stabilen Zustände realisieren lassen. Was sagt dazu die Erfahrung?

Motore, deren Drehzahl mit wachsender Belastung ein wenig steigt, lassen sich ohne Schwierigkeit herstellen. Zum Beispiel kann ein mit konstanter Spannung betriebener Gleichstrom-Nebenschlußmotor eine solche Charakteristik haben[1]). Wäre bei einem solchen Motor der Ankerwiderstand null und keine Ankerrückwirkung vorhanden, so würde seine Umdrehungszahl konstant sein, nämlich so groß, daß die im Anker induzierte EMK. gleich der angelegten Spannung würde. Der endliche Ankerwiderstand bedingt, daß die induzierte EMK. um den Spannungsabfall im Anker kleiner sein muß als die angelegte Spannung; durch ihn wird also ein Abnehmen der Umdrehungszahl mit wachsendem Strome, d. h. mit wachsendem Drehmoment bedingt. Die Ankerrückwirkung, d. h. die Schwächung des Magnetfeldes durch den Ankerstrom, wirkt in umgekehrtem Sinne: sie hat zur Folge, daß bei gleicher Umdrehungszahl die induzierte EMK. kleiner wird, oder daß zur Erzeugung der gleichen EMK. eine höhere Umdrehungsgeschwindigkeit sich einstellen muß. Die Ankerrückwirkung allein würde daher bewirken, daß die Umdrehungszahl mit wachsendem Ankerstrom, also mit wachsendem Drehmoment zunähme. Bei den wirklichen Motoren überlagern sich diese beiden Wirkungen: der Verlauf der Charakteristik wird davon abhängen, welche von ihnen überwiegt. Das Ergebnis, welches uns hier interessiert, ist: bei einem Gleichstromnebenschlußmotor mit starker Ankerrückwirkung und geringem Ankerwiderstande nimmt die Umdrehungszahl mit steigender Belastung zu; nach Fig. 29 müßte also der Betrieb eines solchen Motors praktisch unmöglich sein.

In Wirklichkeit lassen sich dagegen solche Motore ganz gut betreiben, namentlich dann, wenn die Umdrehungszahl mit wachsender Belastung nur wenig zunimmt, d. h. bei sehr steil ansteigender Motorcharakteristik (wo nach Fig. 29 erst recht Labilität eintreten müßte). Unser Kriterium *B* versagt also hier. Die Ursache dieses Ver-

---

1) Vergl. z. B. E. Arnold, Die Gleichstrommaschine, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1906, S. 615.

sagens ist dieselbe, die in den verschiedenen Fällen des Kap. I (§§ 5—7) das Versagen des elektrischen Stabilitätskriteriums (A) verschuldete: Hier wie dort ist eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Stabilitätskriteriums nicht erfüllt, nämlich die, daß auch bei schnelleren Änderungen der Zustand des Motors und der Arbeitsmaschine auf den „statischen" Charakteristiken M und m verläuft. In Wirklichkeit ist vielmehr dann eine andere, „dynamische" Charakteristik maßgebend, und das Kriterium B gilt nur dann, wenn die Abweichung der dynamischen von der statischen Charakteristik eine solche ist (vgl. § 6), wie sie dem Vorhandensein von trägen Massen entspricht (das Trägheitsmoment Θ spielt ja bei der Ableitung des mechanischen Kriteriums B dieselbe Rolle wie die Selbstinduktion L bei der Ableitung des elektrischen Kriteriums A). Wir wollen uns aber hier nicht weiter mit allgemeinen Betrachtungen über dynamische Charakteristiken befassen; es möge die Bemerkung genügen, daß sich die ganzen Ausführungen des § 6 fast wörtlich auf die mechanische Stabilitätsbetrachtung übertragen lassen. Wir wollen vielmehr im folgenden Kapitel spezielle Beispiele behandeln, bei denen die dynamische mechanische Charakteristik von der statischen abweicht. Da in der Elektrotechnik diese Abweichung stets elektrischen Ursprungs ist, so ist bei diesen Beispielen auch die elektrische Stabilität zu untersuchen; man kann daher, anstatt von dem durch die elektrischen Verhältnisse veränderten mechanischen Stabilitätskriterium zu sprechen, ebensogut sagen, das elektrische Stabilitätskriterium sei durch die mechanischen Eigenschaften des Systems modifiziert worden. Wir sprechen deshalb bei diesen Fällen von „mechanisch-elektrischer Stabilität".

Kapitel III.

Die mechanisch-elektrische Stabilität.

§ 10. Das Beispiel des § 9 A in strengerer Behandlung.

A. Ableitung der Stabilitätsbedingungen. Wir knüpfen an das erste Beispiel des § 9 an, wo wir einen Drehstrommotor untersucht hatten, der mit einer konstant erregten Gleichstromdynamomaschine belastet war. Wir hatten dort statt des

ω, M-Diagramms das E, J-Diagramm gezeichnet, auf Grund der Tatsache, daß das Drehmoment m proportional der Stromstärke J der Dynamomaschine, die Winkelgeschwindigkeit ω proportional ihrer EMK. E sein mußte. Daher stellt in den Figg. 25—27 die Kurve M gleichzeitig auch die elektrische Charakteristik der von dem Drehstrommotor getriebenen Dynamomaschine dar, während die geraden Linien m die Charakteristiken des von ihr gespeisten Verbrauchers, nämlich des Schließungswiderstandes $w = w_1 + w_a$ sind (Gl. 5, S. 77. Der Ankerwiderstand w_a ist dabei zum Verbraucher gerechnet). Daher können wir an Hand dieser Diagramme, z. B. von Fig. 27, gleichzeitig die elektrische Stabilität des Schließungskreises der Dynamomaschine mit Hilfe des Kriteriums A untersuchen; wie man sofort übersieht, ergibt sich das überraschende Resultat, daß links vom Maximum von M die Bedingung der elektrischen Stabilität gerade die entgegengesetzte ist wie die der mechanischen; wenn der Zustand nach dem mechanischen Stabilitätskriterium B stabil ist, müßte er nach dem elektrischen Kriterium A labil sein und umgekehrt. Daß unsere obigen Versuche die Theorie bestätigten, ist also nur dem zufälligen Umstande zuzuschreiben, daß wir gerade die mechanische und nicht die elektrische Stabilität untersucht haben; daraus, daß die beiden Stabilitätskriterien einander widersprechen, folgt jedenfalls, daß mindestens eins von ihnen hier nicht angewendet werden darf.

Tatsächlich sind, wie wir zeigen werden, strenggenommen beide Kriterien hier nicht uneingeschränkt anwendbar, und zwar deshalb, weil die dynamischen Charakteristiken — sowohl die elektrischen wie die mechanischen — anders verlaufen als die statischen. Um das zu erkennen, müssen wir auf die Ableitung des elektrischen und des mechanischen Stabilitätskriteriums zurückgehen.

Wir waren bei der Ableitung der mechanischen Stabilitätsbedingung (§ 8) ausgegangen von der Bewegungsgleichung des rotierenden Systems:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = M(\omega), \tag{1}$$

während wir die elektrische Stabilitätsbedingung (§ 1) ableiteten aus der Differentialgleichung des elektrischen Kreises:

$$L \frac{dJ}{dt} + e(J) = E(J),$$

die hier, wo der Verbraucher ein konstanter Widerstand ist, übergeht in

$$L\frac{dJ}{dt} + wJ = E(J). \tag{2}$$

Voraussetzung war dabei, daß m und M nur von ω, e und E nur von J abhängen sollten. Wir wollen untersuchen, inwieweit diese Voraussetzung erfüllt ist. Stets erfüllt ist sie bei $M(\omega)$ (nach Voraussetzung) und bei $e(J)\,(= Jw)$. Dagegen ist der Zusammenhang von m und ω gegeben durch die Gleichungen (2) und (3) des § 9:

$$m = aJ \tag{3}$$

$$E = a\omega \tag{4}$$

zu denen noch eine Beziehung zwischen J und E hinzukommt. Als solche hatten wir damals die Gleichung (5) des § 9 benutzt:

$$E = Jw \tag{5}$$

und dann wird allerdings $m = \frac{a^2}{w}\,\omega$, also eine nur von ω abhängige Funktion. Vergleich von Gleichung (5) mit Gleichung (2) lehrt aber, daß Gleichung (5) gar nicht allgemein, sondern nur bei Gleichgewicht $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ gilt; im allgemeinen ist sie vielmehr durch die Differentialgleichung (2) zu ersetzen, und damit ist m nicht mehr allein von ω, sondern auch noch von $\frac{dJ}{dt}$ abhängig.

Genau so ergibt sich, wenn man von der Differentialgleichung (2) des elektrischen Kreises ausgeht, daß E nicht allein von J abhängt, daß vielmehr der Zusammenhang zwischen E und J gegeben ist durch Gleichung (3), (4) und die Differentialgleichung (1), in der der zeitliche Differentialquotient $\frac{d\omega}{dt}$ vorkommt.

Da somit die Voraussetzungen, unter denen die beiden Stabilitätskriterien abgeleitet wurden, hier nicht erfüllt sind, gilt weder das mechanische noch das elektrische Stabilitätskriterium; vielmehr ist aus den beiden Differentialgleichungen (1) und (2), die hier simultan gelten, eine neue Stabilitätsbedingung abzuleiten.

Durch Einsetzung der Gleichungen (3) und (4) in die Differentialgleichungen (1) und (2) erhält man:

$$\Theta\frac{d\omega}{dt} + aJ = M(\omega), \tag{6}$$

$$L\frac{dJ}{dt} + wJ = a \cdot \omega. \qquad (7)$$

Auf diese beiden Gleichungen ist nun das in § 4 allgemein entwickelte, an den Beispielen § 5 und § 7 erläuterte Verfahren zur Ableitung der Stabilitätsbedingungen (Methode der kleinen Schwingungen) anzuwenden:

Wir stellen zuerst die Gleichungen für den Gleichgewichtszustand $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ auf:

$$aJ_0 = M(\omega_0), \qquad (8)$$

$$wJ_0 = a \cdot \omega_0, \qquad (9)$$

woraus man durch Elimination von J_0 erhält:

$$\frac{a^2}{w}\omega_0 = M(\omega_0),$$

d. h. der Gleichgewichtszustand wird, wie in § 9, bestimmt durch den Schnittpunkt der Charakteristik $M(\omega)$ des Motors mit der statischen Charakteristik $m(\omega)$ der Arbeitsmaschine, deren Gleichung ja nach Gl. (6), § 9 lautet:

$$m(\omega) = \frac{a^2}{w} \cdot \omega. \qquad (10)$$

Sodann ist der Verlauf kleiner Abweichungen J_1 und ω_1 der Variablen J und ω von ihren Gleichgewichtswerten J_0 und ω_0 zu untersuchen; wir setzen dementsprechend:

$$J = J_0 + J_1,$$

$$\omega = \omega_0 + \omega_1.$$

Einsetzung dieser Ausdrücke in Gleichung (6) und (7) ergibt mit Rücksicht auf (8) und (9) für J_1 und ω_1 die Differentialgleichungen:

$$\Theta\frac{d\omega_1}{dt} + aJ_1 = M(\omega_0 + \omega_1) - M(\omega_0) = \omega_1 \cdot M'(\omega_0), \qquad (11)$$

$$L\frac{dJ_1}{dt} + wJ_1 = a\omega_1. \qquad (12)$$

Elimination einer der beiden Variablen, z. B. ω_1, ergibt:

$$\frac{d^2J_1}{dt^2} + \left(\frac{w}{L} - \frac{M'}{\Theta}\right)\frac{dJ_1}{dt} + \left(\frac{a^2}{\Theta L} - \frac{w}{L}\frac{M'}{\Theta}\right)J_1 = 0. \qquad (13)$$

Dieselbe Differentialgleichung gilt für ω_1 (vgl. § 4). Wir schreiben wieder zur Abkürzung:

$$\frac{w}{L} - \frac{M'}{\Theta} = a_1, \tag{14}$$

$$\frac{a^2}{\Theta L} - \frac{w}{L}\frac{M'}{\Theta} = a_2; \tag{15}$$

damit lautet Gleichung (13):

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + a_1 \frac{dJ_1}{dt} + a_2 J_1 = 0. \tag{13a}$$

Das ist die Differentialgleichung, die den Ablauf einer kleinen Abweichung J_1 vom Gleichgewicht beherrscht. Stabil ist der Zustand wieder dann, wenn die Störung im Laufe der Zeit verschwindet, und das ist, wie in § 3 im einzelnen und in § 4 allgemein bewiesen wurde, dann und nur dann der Fall, wenn beide Koeffizienten a_1 und a_2 positiv sind. Demnach lauten die Stabilitätsbedingungen:

$$a_1 = \frac{w}{L} - \frac{M'}{\Theta} > 0, \tag{16}$$

$$a_2 = \frac{a^2}{\Theta L} - \frac{w}{L}\frac{M'}{\Theta} > 0, \tag{17}$$

oder, da w, L und Θ stets positiv sind:

$$\frac{\Theta w}{L} - M' > 0, \tag{16a}$$

$$\frac{a^2}{w} - M' > 0. \tag{17a}$$

Die geometrische Bedeutung dieser beiden Bedingungen ist die folgende:

Um mit der zweiten anzufangen, so ist nach Gl. (10):

$$\frac{a^2}{w} = \frac{dm}{d\omega} = m'(\omega)$$

gleich dem Anstieg der Charakteristik $m(\omega)$; damit geht Gl. (17a) über in

$$m'(\omega_0) - M'(\omega_0) > 0, \tag{17b}$$

d. h. in das mechanische Stabilitätskriterium des § 8 (Kriterium B).

Die andere Stabilitätsbedingung (16a) wollen wir ebenfalls umformen, indem wir für w einen anderen Ausdruck einsetzen. Quadrieren wir Gl. (9) und dividieren auf beiden Seiten durch $J_0{}^2 w$, so wird:

$$w = \frac{a^2}{w}\,\frac{\omega_0{}^2}{J_0{}^2} = m'(\omega_0)\cdot\frac{{}^1\!/_2\,\omega_0{}^2}{{}^1\!/_2\,J_0{}^2},$$

also:

$$\frac{\Theta w}{L} = m'(\omega_0)\cdot\frac{{}^1\!/_2\,\Theta\omega_0{}^2}{{}^1\!/_2\,L J_0{}^2} = v\cdot m'(\omega_0),$$

worin

$$v = \frac{{}^1\!/_2\,\Theta\omega_0{}^2}{{}^1\!/_2\,L J_0{}^2} \tag{18}$$

das Verhältnis der im Gleichgewichtszustande aufgespeicherten mechanisch-kinetischen Energie ${}^1\!/_2\,\Theta\omega_0{}^2$ zur magnetischen Energie ${}^1\!/_2\,L J_0{}^2$ bedeutet. Demnach läßt sich Bedingung (16a) auch schreiben:

$$v\cdot m'(\omega_0) - M'(\omega_0) > 0. \tag{16b}$$

Wir sehen aus diesem Ergebnis, daß im vorliegenden Falle die Erfüllung des Kriteriums B (Gl. 17b) eine zwar notwendige, im allgemeinen aber nicht hinreichende Bedingung der Stabilität ist. Wenn, wie bei dem hier behandelten Beispiele, m' und M' beide positiv sind, so ist allerdings unter Umständen Kriterium B auch hinreichend, nämlich solange $v \geqq 1$ ist; denn dann ist mit Gleichung (17b) auch Gleichung (16b) sicher erfüllt. Ist dagegen $v < 1$, so ist umgekehrt (17b) sicher erfüllt, wenn (16b) erfüllt ist; dann ist also Gleichung (16b) notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingung; sie lautet in geometrischer Fassung:

Der Anstieg der Charakteristik $M(\omega)$ muß kleiner sein als der im Verhältnis v verkleinerte Anstieg der (geradlinigen) Charakteristik $m(\omega)$.

Aus dieser strengeren Behandlung des Stabilitätsproblemes erkennen wir, daß unsere oben gegebene einfache Behandlung stets dann zum richtigen Resultat führt, solange die kinetische Energie des Systems größer ist als die magnetische. Nun war in unserm Fall Θ[1] $= \backsim 0{,}01$ Watt·sec³ und dort, wo die Steigung der Charakteristik $M(\omega)$ am größten war, $\omega_0 = \backsim 100\ \text{sec}^{-1}$, so daß

1) Die Messung des Trägheitsmomentes Θ des Aggregates Drehstrommotor-Gleichstromdynamo geschah in folgender Weise durch einen Auslaufversuch:

Die Dynamomaschine wurde wieder fremd erregt und das Aggregat

$$\frac{1}{2}\,\Theta\omega_0^{\,2} = \backsim 50 \text{ Wattsec}$$

war.

Um eine magnetische Energie von dieser Größenordnung aufspeichern zu können, hat man schon eine sehr beträchtliche Selbstinduktion (bei $J_0 = 1$ Amp. mindestens 100 Henry) nötig, wie sie jedenfalls bei obigem Versuch im Schließungskreise der Dynamomaschine nicht vorhanden war. Daher reduzierte sich für diesen

---

durch einen in den Anker geschickten gemessenen Strom i angetrieben. Außerdem wurden Winkelgeschwindigkeit ω und Klemmenspanpung e am Anker gemessen. Ist E die im Anker induzierte EMK., so gilt:

$$E = e - i\,w_a = a\,\omega$$

und

$$R = \frac{Ei}{\omega} = a\,i,$$

wenn R das widerstehende Drehmoment der Reibungskräfte ist. Wird jetzt der Strom ausgeschaltet, so sinkt die Geschwindigkeit des Motors nach dem Gesetze:

$$\Theta\,\frac{d\omega}{dt} + R = 0,$$

also sinkt die EMK., die jetzt gleich der Klemmenspannung ist, nach dem Gesetz:

$$\frac{\Theta}{a}\cdot\frac{dE}{dt} + a\,i = 0,$$

und damit berechnet sich Θ zu:

$$\Theta = \frac{a^2 i}{-\frac{dE}{dt}},$$

vorausgesetzt, daß R, also i, unabhängig von ω bzw. E ist. Die Messung ergab ($w_a = 14{,}5\ \Omega$, n = Drehzahl pro min):

n	e	i	$E = e - i\,w_a$	a
1015	225	0,35	220	1,30
1050	150	0,30	145	1,36
Also im Mittel:		0,325		1,33

Nach dem Ausschalten sank E in 2,2 sec von 225 auf 100 Volt, also:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{225 - 100}{2{,}2} = 57,$$

also:

$$\Theta = \frac{1{,}33^2 \cdot 0{,}325}{57} = \mathbf{0{,}01} \text{ Watt} \cdot \text{sec}^3.$$

Auf die der Messung anhaftenden Fehler einzugehen hat keinen Zweck, da es hier nur auf die Größenordnung von Θ ankommt.

Fall die Stabilitätsbedingung auf das einfache mechanische Kriterium (17b) in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis.

B. Bestätigung der Rechnung durch den Versuch. Für $v \geqq 1$ sind die Stabilitätsbedingungen, die sich dann auf das einfache mechanische Stabilitätskriterium (Gl. 17b) reduzieren, schon durch die Versuche des § 9 bestätigt; es ist also jetzt nur noch der Nachweis zu erbringen, daß, wenn $v < 1$ ist, auch Labilität eintreten kann, trotzdem jenes Kriterium erfüllt ist.

Vorhin wurde schon gezeigt, daß ganz erhebliche Selbstinduktionen im Schließungskreise der Dynamomaschine vorhanden sein müssen, damit diese „Labilität zweiter Art" auftritt. Andererseits genügt es aber auch nicht, einfach eine beliebig große Selbstinduktion zu nehmen; denn es kommt nicht auf L allein, sondern auf die Größe $\frac{1}{2} L J_0^2$ an, und wenn der Widerstand der Selbstinduktionsspule zu groß wird, kann dadurch J_0 so sehr verkleinert werden, daß die magnetische Energie $\frac{1}{2} L J_0^2$ doch zu klein bleibt. Wir wollen deshalb die Bedingungen für das Auftreten der Labilität zweiter Art genauer diskutieren. Das, was wir erreichen wollen, ist, wie oben gesagt:

Erstens: Von den beiden Stabilitätsbedingungen (16) und (17) soll die zweite erfüllt sein, es soll also

$$m'(\omega_0) - M'(\omega_0) > 0 \qquad (17b)$$

sein.

Zweitens: Die erste (16a) der beiden Bedingungen soll nicht erfüllt sein, es soll also

$$\Theta \frac{w}{L} - M'(\omega_0) < 0 \qquad (19)$$

sein. Gleichung (19) verlangt, daß $\Theta \frac{w}{L}$ klein und M' groß sei; andererseits ist der Größe von M' durch Gleichung (17b) eine Schranke gesetzt. Die verschiedenen Formen von Charakteristiken, die wir unserem Motor durch Veränderung der Rotorselbstinduktion geben können, werden, wie auf S. 78 gezeigt, annähernd durch die Fig. 21b dargestellt; sie zeigt, daß bei allen Kurven M' ein Maximum hat, nämlich in den Wendepunkten W. Daraus, daß die Kurven der Fig. 21b alle einander ähnlich sind, folgt, daß der Betrag dieses Maximums bei allen Kurven der gleiche ist; für den beabsichtigten Versuch ist es daher gleichgültig, welche Charakteristik wir dem Motor geben; sie muß nur so hoch liegen, daß im Punkte W das mechanische Stabilitätskriterium (17b) erfüllt ist (wie es

z. B. bei den Kurven $\operatorname{tg}\psi = 2$ und $\operatorname{tg}\psi = 4$ der Fall ist, bei $\operatorname{tg}\psi = 8$ dagegen nicht); dazu muß übrigens, wie man sofort sieht, längs der ganzen Motorcharakteristik jenes Kriterium (17b) erfüllt sein. Damit ist die Größe von M' festgelegt; nach Gleichung (19) muß nun noch $\Theta \frac{w}{L}$ möglichst klein, oder da Θ nicht verkleinert werden kann, die Zeitkonstante des Schließungskreises des Dynamoankers $\frac{L}{w} = T$ möglichst groß gemacht werden. Bei dem vorhandenen Motor war der Maximalwert von M' etwa:

$$M'_{max} = \backsim 0{,}01 \text{ Watt} \cdot \text{sec}^2,$$

ferner war

$$\Theta = \backsim 0{,}01 \text{ Watt} \cdot \text{sec}^3$$

(wie oben); also muß nach Gleichung (19):

$$T = \frac{L}{w} > \frac{\Theta}{M'} = \frac{0{,}01}{0{,}01} = 1 \text{ sec}$$

sein. Das ist eine Zeitkonstante, die hart an der Grenze des Erreichbaren liegt und nur bei Spulen mit Eisenkern bei sehr geringer Sättigung des Eisens zu erwarten ist, d. h. bei möglichst großen Eisenmassen. Ich habe deshalb, nachdem Versuche mit vier großen, 5 KVA.-Transformatoren fehlgeschlagen waren, die Magnetwicklungen von einigen möglichst großen Motoren bzw. Dynamomaschinen durchprobiert. Geeignet erwiesen sich schließlich ein 15 KW.-Hochspannungsgenerator, dessen Feldwicklung, mit dem Dynamoanker zusammengeschaltet, bei einem Gesamtwiderstande von ca. 40 Ω eine Zeitkonstante[1]) $T = 2{,}0$ sec besaß, und ein 20 PS.-Gleichstrommotor älterer Bauart, der sich durch besonders große Eisenmassen auszeichnete; mit dessen Magnetwicklung erhielt ich bei einem Gesamtwiderstande von ca. 140 Ω eine Zeitkonstante $T = 1{,}7$ sec. Beide Wicklungen in Serie geschaltet

---

1) Die Messung der Zeitkonstante T konnte hier direkt mit der Stoppuhr ausgeführt werden; ich bestimmte jedesmal die Zeit T', die bei kurzgeschlossener Wicklung der Strom brauchte, um von 1 Ampere auf 0,25 Ampere zu sinken; dabei war in den Schließungskreis der Anker der Dynamomaschine, die zur Belastung des Drehstrommotors diente, eingeschaltet.

Die Zeitkonstante ist dann:

$$T = \frac{T'}{ln\,4} = 0{,}72 \cdot T'.$$

ergaben bei einem Gesamtwiderstande von 165 Ω einen Wert $T = 1{,}9$ sec, entsprechend einer Selbstinduktion von ca. 300 Henry.

Mit letzterer Schaltung wurde der Versuch ausgeführt. Ehe ich dessen Ergebnis mitteile, wollen wir uns überlegen, welcher Art die zu erwartende Labilität denn sein muß. Wie oben gezeigt, läßt sich Gleichung (19) nur knapp erfüllen, d. h. a_1 (Gl. 16) wird zwar negativ, sein Betrag aber nur sehr klein. Dagegen sind der Erfüllung von Gleichung (17b) bzw. (17) keine Schranken gesetzt; denn M' kann nicht über einen gewissen Maximalwert gesteigert werden, während m' beliebig groß gemacht werden kann (dadurch, daß man die Charakteristik M genügend hoch wählt, vgl. Fig. 21b). Daher kann die Differenz $m' - M'$ (Gl. 17b) und damit auch a_2 (Gl. 17) beliebig groß gemacht werden. Im allgemeinen wird also die Gleichung

$$a_1{}^2 - 4\,a_2 < 0,$$

die wir in § 3 (Gl. 13) als Kriterium dafür kennen gelernt hatten, daß Schwingungen auftreten, erfüllt sein; d. h. die Labilität wird eine derartige sein, daß die Variablen, z. B. die Drehgeschwindigkeit ω, um ihren Gleichgewichtswert Pendelungen ausführen, deren Amplitude ständig wächst.

Diese Voraussage wurde denn auch durch den Versuch bestätigt. Dabei hatte der Drehstrommotor die durch die Kurve M, Fig. 30 dargestellte Charakteristik; sie wurde gemäß einer oben gemachten Bemerkung so gewählt, daß in allen ihren Punkten, d. h. bei beliebiger Belastung der Bremsdynamo, das mechanische Stabilitätskriterium (B) erfüllt war. Die Aufnahme der Charakteristik M geschah so, wie in § 9 erläutert; wie dort, so sind auch hier an Stelle der Variablen M und ω die ihnen proportionalen Größen J und E aufgetragen; der Proportionalitätsfaktor a hatte hier den Wert 1,33. Die geradlinige Charakteristik m der Arbeitsmaschine ist, da der gesamte Schließungswiderstand hier 165 Ω betrug, bestimmt durch die Gleichung: $\frac{E}{J} = 165\ \Omega$, so daß der Gleichgewichtszustand dem Schnittpunkt S (Fig. 30) entsprechen mußte. Diese Gleichgewichtslage ließ sich aber in Übereinstimmung mit der Theorie nicht realisieren, vielmehr traten Pendelungen um den Punkt S auf, deren Amplitude anwuchs; allerdings, entgegen unserer Voraussage, nicht dauernd, sondern sie erreichte schließlich einen konstanten Betrag; die Grenzen, zwischen denen

dann die Drehgeschwindigkeit (gemessen durch die EMK. E) hin und her pendelte, entsprachen den Abszissen E_1 und E_2 in Fig. 30.

Daß die Schwingungsamplitude nicht dauernd anwuchs, sondern schließlich konstant wurde, widerspricht nicht unserer Theorie, denn diese gilt ja nur für so kleine Amplituden, daß man innerhalb des in Betracht kommenden Intervalls die Charakteristiken M und m als geradlinig, ihren Anstieg M' bzw. m' als konstant ansehen kann; hier ist aber die Amplitude, wenn sie konstant geworden ist, schon so groß (von E_1 bis E_2, Fig. 30), daß das keineswegs mehr zutrifft. Wir können aber auch auf diese großen Amplituden wenigstens mit einiger Annäherung die Theorie an-

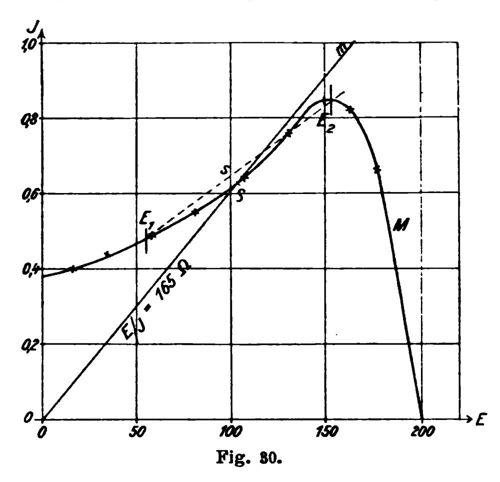


Fig. 30.

wenden [1]), wenn wir für M' einen Mittelwert $\overline{M'}$ aus den innerhalb des Intervalls $E_1 \cdots E_2$ liegenden Werten einsetzen, und als solchen wollen wir den arithmetischen Mittelwert nehmen; dieser ist gleich dem Anstieg der Sehne s (Fig. 30), welche die Endpunkte des Intervalls verbindet. Man sieht aus der Figur, daß diese Sehne um so flacher verläuft, $\overline{M'}$ also um so kleiner ist, je weiter E_1 und E_2 auseinander liegen, d. h. je größer die Amplitude ist. Nun ist nach Gl. (14a) des § 3 (S. 26) das Anwachsen der Schwingungen bestimmt durch einen Faktor $e^{-\frac{a_1}{2}t}$, es erfolgt also um so langsamer, je kleiner

$$-a_1 = \frac{\overline{M'}}{\Theta} - \frac{w}{L}, \tag{16}$$

1) Der Beweis für die Zulässigkeit des Verfahrens ist auf S. 119—122 gegeben.

d. h. je kleiner $\overline{M}'$ ist; daher muß, in Übereinstimmung mit den Versuchen, das Anwachsen mit zunehmender Amplitude immer langsamer erfolgen und schließlich ganz aufhören, wenn nämlich $\overline{M}'$ so klein geworden ist, daß $-a_1 = 0$ wird. Dieser Grenzwert von $\overline{M}'$ berechnet sich aus Gl. (16) zu:

$$(\overline{M}')_{\min} = \Theta \frac{w}{L},$$

also hier, wo $\Theta = 0{,}01$ und $\frac{w}{L} = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}9}$ ist:

$$(\overline{M}')_{\min} = \frac{0{,}01}{1{,}9} = \mathbf{0{,}0053}.$$

Die Amplitude muß also so lange wachsen, bis der mittlere Anstieg der Charakteristik $\overline{M}$ auf diesen Betrag gesunken ist. Bei der in Wirklichkeit beobachteten Amplitude findet man aus Fig. 30 für den mittleren Anstieg der Charakteristik, d. h. für den Anstieg der Sehne s:

$$\overline{\left(\frac{dJ}{dE}\right)} = 0{,}0037,$$

also:

$$\overline{M}' = \overline{\left(\frac{dM}{d\omega}\right)} = \frac{dM}{dJ} \cdot \overline{\left(\frac{dJ}{dE}\right)} \cdot \frac{dE}{d\omega} = a^2 \overline{\left(\frac{dJ}{dE}\right)} = 1{,}33^2 \cdot 0{,}0037 = \mathbf{0{,}0065}.$$

In Anbetracht der Inkonstanz der Größe L (L hängt von der Stromstärke und der Frequenz ab) und der Unsicherheit des Mittelwertes $\overline{M}'$ (wir haben ja ganz willkürlich den arithmetischen Mittelwert genommen) dürfte diese Übereinstimmung als befriedigend bezeichnet werden.

Für die Schwingungsdauer ergibt die Theorie, wie in § 5 [Gl. (8)] auseinander gesetzt, den Wert:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2 - \frac{1}{4} a_1^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2}}, \tag{20}$$

da hier $a_1 = 0$ ist. Nach Gleichung (15) ist

$$a_2 = \frac{a^2}{\Theta L} - \frac{w}{L} \frac{\overline{M}'}{\Theta}.$$

Es war

$$a = 1{,}33,$$
$$\Theta = 0{,}01,$$
$$L = 300,$$

$$\frac{w}{L} = \frac{M'}{\Theta} = \sim 0{,}6 \left(\text{Mittel aus } \frac{w}{L} = 0{,}53 \text{ und } \frac{M'}{\Theta} = 0{,}65\right),$$

also:

$$a_2 = \frac{1{,}33^2}{0{,}01 \cdot 300} - 0{,}6^2 = 0{,}59 - 0{,}36 = 0{,}23$$

und

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{0{,}23}} = 13 \text{ sec.}$$

Beobachtet wurde:

$$\tau = 14 \text{ sec.}$$

in guter Übereinstimmung mit der Rechnung.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die Ableitung des Stabilitätskriteriums nicht streng richtig ist, weil auch das Drehmoment M (ebenso wie das Bremsmoment m) nicht allein von der Drehgeschwindigkeit ω abhängt; vielmehr ist M bestimmt durch Stator- und Rotorstrom des Drehstrommotors, und diese hängen mit ω durch eine die Zeit enthaltende Differentialgleichung zusammen (nach einer Änderung des Betriebszustandes muß sich das System erst wieder „einschwingen“ [1])). Die strenge Behandlung würde daher hier zu einer Differentialgleichung höherer Ordnung führen. Die hier gegebene einfache Behandlung, deren Zulässigkeit der Erfolg zeigt, läßt sich auch theoretisch rechtfertigen durch einen Analogieschluß: ebenso, wie die nicht eindeutige Abhängigkeit des m von ω die Stabilitätsbedingung erst dann beeinflußte, wenn die in der Selbstinduktion L aufgespeicherte magnetische Energie größer wurde, als die in den trägen Massen vorhandene kinetische Energie, so ist auch hier zu erwarten, daß das Stabilitätskriterium erst dann durch das „Einschwingen“ des Stator- und Rotorstromes verändert wird, wenn die in Stator und Rotor aus- und einströmende magnetische Energie größer wird, als jene mechanische Energie, und das ist hier sicher nicht der Fall.

§ 11. Zurückführung der mechanisch-elektrischen Stabilität bei Gleichstrommaschinen auf die elektrische Stabilität.

A. Die Gleichstrommaschine als Kondensator aufgefaßt. Die im vorstehenden Paragraphen theoretisch abgeleiteten und experi-

1) K. W. Wagner, Elektrot. ZS. **31**, 654, 1910.

mentell beobachteten Schwingungen lassen sich noch von einem ganz anderen Standpunkte aus betrachten. Ich will zeigen, daß für das Zustandekommen dieser Schwingungen das Vorhandensein des Antriebsmotors mit der Charakteristik M durchaus unwesentlich ist. Denn nehmen wir das treibende Drehmoment M als unabhängig von ω an, so daß $M'(\omega) = 0$ wird, so geht die Differentialgleichung (13)* S. 87, aus der wir das Auftreten der Schwingungen abgeleitet haben, über in

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{a^2}{\Theta L} J_1 = 0. \tag{1}$$

In dieser Gleichung kommen die für den Antriebsmotor charakteristischen Größen überhaupt nicht mehr vor, sie enthält nur die Konstanten der angetriebenen Dynamomaschine und ihres Schließungskreises. Sie muß also auch gelten, wenn wir den Antriebsmotor weglassen; allerdings müssen wir dann die Dynamomaschine als reibungslos annehmen, weil wir ja das Reibungsbremsmoment als im Motor auftretend angenommen hatten. Wir müssen also schließen:

Eine durch eine Selbstinduktion geschlossene, konstant erregte Dynamomaschine ist fähig, Schwingungen auszuführen. Vergleicht man die Schwingungsgleichung dieses Systems mit der bekannten Differentialgleichung der elektrischen Schwingungen eines aus Selbstinduktion L, Kapazität C und Widerstand w bestehenden Systems:

$$\frac{dJ^2}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{LC} J = 0, \tag{2}$$

so sieht man, daß sie in einander übergehen, wenn man setzt

$$C = \frac{\Theta}{a^2}, \tag{3}$$

das heißt: Eine mit konstantem Strom erregte, reibungslose Gleichstromdynamomaschine verhält sich wie ein Kondensator mit der Kapazität $C = \frac{\Theta}{a^2}$.

Zu demselben Ergebnis kann man unmittelbarer aus der Bewegungsgleichung der Dynamomaschine gelangen. Wir wollen dabei auch die Reibungswiderstände berücksichtigen, indem wir für das von der Reibung herrührende Bremsmoment in die Bewegungsgleichung den Wert $R \cdot \omega$ einsetzen; dabei soll R selbst

noch von ω abhängen können, so daß durch diese Schreibweise die Allgemeinheit nicht beschränkt wird. Dann lautet die Bewegungsgleichung [1])

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + R\omega = M = aJ. \tag{4}$$

Setzen wir darin aus Gleichung (4), S. 86 für ω den Wert

$$\omega = \frac{E}{a}$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{\Theta}{a^2}\frac{dE}{dt} + \frac{R}{a^2}E = J. \tag{5}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Dynamomaschine äquivalent ist einem Kondensator mit parallel geschaltetem Widerstande W, denn bei einem solchen System hängt der Strom mit der Spannung durch folgende Gleichung zusammen

$$C\frac{dE}{dt} + \frac{E}{W} = J. \tag{5a}$$

Vergleich der beiden Gleichungen ergibt

$$C = \frac{\Theta}{a^2} \tag{3}$$

wie oben, und

$$W = \frac{a^2}{R}. \tag{3a}$$

Beachten wir noch, daß die in Gleichung (5) auftretende EMK. der Dynamomaschine E mit der an den Bürsten gemessenen Klemmenspannung e zusammenhängt durch die Beziehung

$$E = e - Jw_a$$

(worin w_a wie früher den Ankerwiderstand bedeutet), daß also der Ankerwiderstand der Maschine wirkt wie ein in Serie zu der Anordnung: Kondensator — parallel liegender Widerstand geschalteter Widerstand, so können wir sagen:

Eine mit konstantem Strome erregte Dynamomaschine verhält sich genau so wie folgende Anordnung: Einem Kondensator von

---

1) Da wir die Maschine als Kondensator, d. h. als stromaufnehmenden, nicht stromerzeugenden Leiter auffassen, ist in der früher benutzten Bewegungsgleichung (Gl. (6), S. 86) das Vorzeichen von J umzukehren.

der Kapazität $C = \frac{\Theta}{a^2}$ ist ein Widerstand von der Größe $W = \frac{a^2}{R}$ parallel geschaltet; in Serie zu beiden liegt ein Widerstand von der Größe w_a. Das entsprechende Schema ist in Fig. 31 gezeichnet. Aus dem Schema ergibt sich ohne weiteres eine einfache Methode zur experimentellen Bestimmung von W: Legt man an die Bürsten BB eine konstante gemessene Gleichspannung e an, und wartet den stationären Zustand ab, so wird der Strom zeitlich konstant und unabhängig von C, nämlich gleich

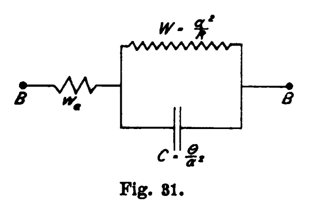


Fig. 31.

$$J = \frac{e}{w_a + W},$$

daher wird

$$W = \frac{e}{J} - w_a = \frac{e - J w_a}{J} = \frac{E}{J}, \tag{6}$$

also, abgesehen von der Korrektion w_a, gleich dem scheinbaren Ankerwiderstande beim stationären Zustande.

B. Zurückführung der Pendelungen in § 10 auf rein elektrische Schwingungen. Durch die Auffassung der Gleichstromdynamo als Kondensator werden die im vorigen Paragraphen behandelten Schwingungen verständlich, indem sie auf die bekannten freien elektrischen Schwingungen zurückgeführt erscheinen. Der Kondensator bildet mit der Selbstinduktion seines Schließungskreises zusammen ein schwingungsfähiges System, dessen Schwingungsdauer nach der Thomsonschen Formel angenähert gleich

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC} = \frac{2\pi\sqrt{L\Theta}}{a} \tag{7}$$

ist. Diese Formel ist, wenn man von den von der Widerstandsdämpfung herrührenden Korrektionen absieht, identisch mit der im vorigen Paragraphen abgeleiteten und experimentell bestätigten Gleichung (20), S. 95.

Es handelt sich nun noch darum, das Auftreten der ungedämpften Schwingungen aufzuklären bzw. auf die Theorie der rein elektrischen ungedämpften Schwingungen zurückzuführen. Ungedämpft wurden die Schwingungen, wenn die Dynamomaschine von einem Motor angetrieben wurde, dessen Charakte-

ristik gewissen Bedingungen genügte. Wir fragen deshalb jetzt:

Welchem rein elektrischen Schema ist eine von einem Motor mit der Charakteristik $M(\omega)$ angetriebene Dynamomaschine äquivalent?

Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir in der gleichen Weise wie oben (Gl. (4)) die Bewegungsgleichung der angetriebenen Dynamomaschine auf. Sie lautet jetzt:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} - M(\omega) = aJ \tag{8}$$

und wir wollen, genau wie in § 9 (S. 75/76), das Drehmoment M wieder so definieren, daß es die Reibungsbremsmomente des ganzen Aggregates mitumfaßt; das Glied $R\omega$, das in Gleichung (4) auftrat, ist hier also mit in dem Gliede $M(\omega)$ enthalten. Setzen wir in diese Gleichung wieder

$$\omega = \frac{E}{a}$$

ein und dividieren durch a, so erhalten wir

$$\frac{\Theta}{a^2} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{a} M\left(\frac{E}{a}\right) = J. \tag{9}$$

Hierin ist das Glied $\frac{1}{a} M\left(\frac{E}{a}\right)$ eine Funktion von E; schreiben wir sie

$$\frac{1}{a} M\left(\frac{E}{a}\right) = F(E), \tag{10}$$

so ergibt sich durch Vergleich mit der Differentialgleichung (5a) des Kondensators mit parallel geschaltetem Widerstande:

Unser System ist äquivalent einem Kondensator von der Kapazität $C = \frac{\Theta}{a^2}$ mit parallel geschaltetem Leiter, dessen Widerstand nicht konstant ist, sondern bei dem Strom i und Spannung E zusammenhängen durch die Gleichung

$$i = -F(E), \tag{11a}$$

d. h. dessen elektrische Charakteristik

$$E = \Phi(-i) \tag{11b}$$



ist, wenn Φ die zu F inverse Funktion bedeutet. Da M bei positivem ω stets positiv ist, ist auch $F(E)$ positiv bei positivem E, also gehört nach Gleichung (11a) zu positivem Strom ein negativer Spannungsabfall, d. h. der dem Kondensator parallel geschaltete Leiter ist ein Generator, dessen Charakteristik dann durch

$$i = + F(E) \tag{11c}$$

bzw.

$$E = \Phi(+ i) \tag{11d}$$

gegeben ist. Die Anordnung des vorigen Paragraphen kann also ersetzt werden durch das in Fig. 32 gezeichnete Schema: Ein Kondensator ist mit den Klemmen eines elektrischen Generators verbunden; parallel zum Kondensator liegt eine Selbstinduktion in Serie mit einem Widerstande. Damit ist das Problem des § 10 vollständig auf ein schon früher behandeltes, rein elektrisches Problem zurückgeführt; denn der Vergleich der Fig. 32 mit Fig. 13 (§ 5) zeigt, daß dieses Schema ein Spezialfall der in § 5 behandelten Anordnung ist. Dort hatten wir einen Generator, der mit einer Kapazität verbunden war; parallel zur Kapazität einen Verbraucher mit der Charakteristik $e(J)$ in Serie mit einer Selbstinduktion L. Dieses Schema geht in das vorliegende über, wenn wir statt des Verbrauchers allgemeiner Art den konstanten Widerstand w (Anker- und Spulenwiderstand) einsetzen; die Charakteristik $e(J)$ wird dann zu einer Geraden Jw, $e'(J)$ wird gleich w. Somit haben wir, da damals kontinuierliche Schwingungen auftraten, die in § 10 beobachteten Pendelungen auf rein elektrische Schwingungen zurückgeführt.

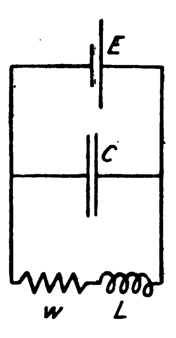


Fig. 32.

Man kann auch aus den Stabilitätsbedingungen des § 5 diejenigen des § 10 ableiten, indem man in die Gleichungen (5) und (6) des § 5 w statt e' einsetzt; man erhält so

$$\frac{w}{L} - \frac{1}{CE'} > 0 \tag{12}$$

und

$$1 - \frac{w}{E'} > 0 . \tag{13}$$

Darin ist noch nach Gleichung (3) C durch $\frac{\Theta}{a^2}$ zu ersetzen und

E' mit Hilfe der Gleichungen (10) und (11) durch M' auszudrücken:

$$E' = \frac{dE}{di} = \frac{d\Phi}{di} = \frac{1}{\left(\frac{di}{d\Phi}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{dF}{dE}\right)};$$

$$\frac{1}{E'} = \frac{dF}{dE} = \frac{dF}{dM} \cdot \frac{dM}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dE} = \frac{1}{a^2}\frac{dM}{d\omega} = \frac{M'}{a^2}.$$

Einsetzung ergibt

$$\frac{w}{L} - \frac{a^2}{\Theta}\frac{M'}{a^2} > 0 \qquad (12a)$$

und

$$1 - w\frac{M'}{a^2} > 0 \qquad (13a)$$

und diese Bedingungen sind in der Tat identisch mit den Stabilitätsbedingungen (16) und (17) des § 10.

C. Gibt es mechanisch-elektrische Systeme, die sich als Selbstinduktion auffassen lassen? Es drängt sich die Frage auf, ob man nicht auch mechanisch-elektrische Anordnungen finden kann, die sich nach außen hin wie Selbstinduktionen verhalten. Es liegt nahe, dazu die andere Form, in der die mechanische Energie auftritt, zu benutzen, nämlich die potentielle, insbesondere die elastische Energieform. In der Tat verhält sich ein Gleichstrommotor, der durch eine starke Feder in einer Ruhelage festgehalten wird, wie eine Selbstinduktion, falls man nämlich von dem Einfluß der Trägheit absieht, d. h. nur so geringe Beschleunigungen zuläßt, daß der Trägheitswiderstand $\Theta \frac{d\omega}{dt} = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gegen die elastische Direktionskraft $K\varphi$ der Feder zu vernachlässigen ist (φ ist der Winkel, um den der Anker aus seiner Ruhelage herausgedreht ist). Verwendet man die Anordnung zur Erzeugung von Schwingungen, so heißt das: die verwendete Schwingungszahl muß klein sein gegenüber der Eigenschwingungszahl des Motorankers, die dieser wegen seiner Trägheit und elastischen Befestigung besitzt. — Dann lautet nämlich die Bewegungsgleichung des Motors

$$R\frac{d\varphi}{dt} + K\varphi = aJ.$$

Differenziert man diese Gleichung und setzt darin

$$E = a\omega = a\frac{d\varphi}{dt}$$

ein, so erhält man

$$E + \frac{R}{K}\frac{dE}{dt} = \frac{a^2}{K}\frac{dJ}{dt}, \qquad (14)$$

während die Gleichung einer Selbstinduktion mit parallel geschaltetem Widerstand lautet:

$$E + \frac{L}{W}\frac{dE}{dt} = L\frac{dJ}{dt}. \qquad (14a)$$

Der Motor ist also äquivalent einer Selbstinduktion vom Betrage

$$L = \frac{a^2}{K}, \tag{15}$$

der ein Widerstand

$$W = \frac{a^2}{R} \tag{15a}$$

parallel geschaltet ist (Fig. 33). Man kann aber auf diese Weise nur relativ kleine Selbstinduktionen herstellen; z. B. würde der in § 10 verwendete Motor bei einer Eigenschwingungsdauer von $\tau = 1$ sec nur eine Selbstinduktion von günstigsten Falles 4 Henry haben; dann verhält er sich aber nur bei Schwingungsdauern, die größer sind als 2—3 sec, als Selbstinduktion, während er bei Schwingungen, die wesentlich schneller als seine Eigenschwingung sind, wieder als Kondensator wirkt (weil dann der Trägheitswiderstand $\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ über die elastische Direktionskraft überwiegt). Bei Verwendung größerer Motore wird bei gleicher Eigenschwingungsdauer τ L noch kleiner (denn da $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{K}}$ ist, muß bei konstantem τ K proportional Θ sein und dieses wächst mit der Größe des Motors).

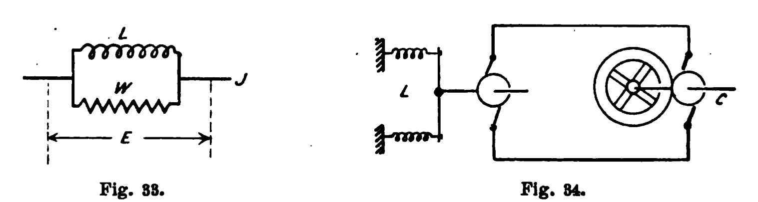


Fig. 33. Fig. 34.

Interessant ist nun folgendes Gedankenexperiment:

Wir schalten einen „Kondensatormotor" C mit einem „Selbstinduktionsmotor" L zusammen zu einem Kreise, wie in Fig. 34 schematisch angedeutet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, a habe in beiden Fällen die gleiche Größe. Man kann dann das System als elektrischen Schwingungskreis auffassen mit der Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2}{K} \cdot \frac{\Theta}{a^2}}. \tag{16}$$

Man kann aber auch die elektrischen Teile nur als Organe zur Kraftübertragung auffassen, die bewirken, daß die Welle des L-Motors sich mit derselben Geschwindigkeit dreht wie die des C-Motors; d. h. wir könnten dieselben Verhältnisse z. B. durch eine Riemenübertragung zwischen beiden Wellen oder besser noch dadurch erreichen, daß wir das Schwungrad von C direkt auf die Welle von L setzten. Dann haben wir ein rein mechanisches schwingungsfähiges System mit der Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{K}}, \tag{16a}$$

eine Formel, die mit der oben erhaltenen übereinstimmt. Paradox erscheint bei diesem Versuch, daß die Selbstinduktionswirkung durch mechanische Elastizität, die Kapazitätswirkung dagegen durch mechanische Trägheit erzielt wird, während man doch im allgemeinen gewohnt ist, Kapazität als elektrische Elastizität und Selbstinduktion als elektrische Trägheit aufzufassen.

Ist die Amplitude der Schwingung bei den betrachteten Motoren so gering, daß die Bürsten sich nur auf einer einzigen Kollektorlamelle bewegen, so ist der Kollektor unwesentlich; charakteristisch für den Motor ist dann nur noch das in einem konstanten Magnetfelde bewegliche Leitersystem. Solche Anordnungen haben wir auch bei den Oszillographen, Telephonen und Vibrationsgalvanometern. Erstere werden stets bei Frequenzen benutzt, die kleiner sind als ihre Eigenschwingungszahl; dann wird die Bewegung des Systems in erster Linie durch seine Elastiztät bestimmt, eine Oszillographenschleife muß sich demnach so verhalten, als ob sie Selbstinduktion hätte. Die Rechnung zeigt, daß diese Selbstinduktion gegenüber dem relativ hohen Schleifenwiderstand stets vernachlässigt werden kann. Bei Telephonen hängt das Verhalten von der Frequenz des hineingeschickten Stromes ab; hohen Frequenzen gegenüber muß sich das Telephon wie eine Kapazität, tiefen gegenüber wie eine Selbstinduktion verhalten. Ist die Frequenz des hineingeschickten Stromes gleich der Eigenfrequenz des Telephons, so tritt weder Kapazitäts- noch Selbstinduktionswirkung auf, sondern die induzierte EMK. ist in Phase mit dem Strome; wir müssen also eine scheinbare Widerstandserhöhung beobachten. Denselben Fall haben wir beim Vibrationsgalvanometer, das stets nur bei Resonanz benutzt wird; in der Tat ist hierfür schon häufig theoretisch und experimentell das Auftreten einer elektromotorischen Gegenkraft, d. h. eine scheinbare Widerstandserhöhung, nachgewiesen worden [1]).

§ 12. Die Erzeugung elektrischer Schwingungen mit „Kondensatormaschinen“.

A. Gedämpfte Schwingungen.

a) Allgemeine Theorie und Versuch.

Die einfachste und naheliegendste Methode, mit Hilfe einer als Kondensator verwendeten Gleichstrommaschine Schwingungen zu erzeugen, ist die, daß man ein aus einem solchen Kondensator und einer Selbstinduktion bestehendes System freie, gedämpfte Schwingungen ausführen läßt. Dazu muß man das System „anstoßen“, d. h. ihm eine gewisse Energiemenge mitteilen — indem man den Kondensator auflädt, oder in die Selbstinduktion einen Strom hineinschickt — und es dann sich selbst überlassen.

Dann gilt für das System, — wenn wir die Reibungswider-

1) Vgl. z. B. die eingehende Untersuchung von F. Wenner, Bull. Bur. of Stand. 6, S. 347—378, 1909.

stände der Dynamomaschine zunächst vernachlässigen — die Differentialgleichung (1) oder (2) des vorigen Paragraphen, die bekannte Schwingungsdifferentialgleichung, deren Integral

$$J = A \cdot e^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varphi\right) \tag{1}$$

— (A und φ sind die von den Anfangsbedingungen abhängenden Integrationskonstanten) — aussagt, daß das System gedämpfte Schwingungen ausführen muß, deren Schwingungsdauer τ annähernd durch die Thomsonsche Formel (Gleichung (7), § 11)

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC} = \frac{2\pi\sqrt{L\Theta}}{a} \tag{2}$$

und deren Dämpfungskonstante durch

$$\delta = \frac{w}{2L} \tag{3}$$

gegeben ist. Diese freien gedämpften Schwingungen ließen sich gut zeigen mit einer kleinen Dynamomaschine (ursprünglich ein Hauptstrommotor, 220 Volt, 0,2 PS.), die sich wegen ihrer geringen Bürstenreibung (Metallbürsten) hierzu besonders gut eignete. Die für uns in Betracht kommenden Daten der Maschine sind folgende:

Trägheitsmoment des Ankers: $\Theta = 0{,}007$ Watt·sec³ (gemessen nach der auf S. 89, Anm., beschriebenen Methode),

Ankerwiderstand: $w_a = 55\,\Omega$,

EMK. für $\omega = 1$: $a = 1{,}14$ Volt·sec (bei der höchst zulässigen Stärke des Erregerstromes),

also die Kapazität: $C = \frac{0{,}007}{1{,}14^2} = 0{,}0054$ Farad.

Fig. 35.

Als Selbstinduktion wurden die in § 10 (S. 92) benutzten Feldwicklungen von zwei 15 KW.-Maschinen verwendet, die in Serie geschaltet, bei einem Widerstande von zusammen 150 Ω eine Gesamtselbstinduktion L von ca. 300 Henry besaßen. Der Versuch wurde nach dem Schema der Fig. 35 ausgeführt; die kleine Dynamomaschine D wurde fremd erregt, der Anker durch die Selbstinduktion L geschlossen. Das „Anstoßen" geschah dadurch, daß der Anker durch einen von einer Batterie B aus hineingeschickten Strom in schnelle Umdrehung versetzt wurde. Schaltete man die Batterie ab, so traten tatsächlich Schwingungen auf, die

allerdings so stark gedämpft waren, daß sich im günstigsten Falle 3 Halbschwingungen beobachten ließen. Die beobachtete Schwingungsdauer war

$$\frac{\tau}{2} = 4{,}2 \text{ sec},$$

während die Berechnung nach der Thomsonschen Formel (Gl. 2) ergibt:

$$\tau = 8 \text{ sec}.$$

Die Übereinstimmung ist befriedigend.

b) Berücksichtigung der Reibung.

Nur die beobachtete starke Dämpfung der Schwingungen läßt sich aus der einfachen Schwingungsgleichung (Gl. (2), § 11), aus der die Thomsonsche Formel abgeleitet ist, nicht erklären, namentlich nicht die Beobachtung, daß nach einer kleinen Zahl von Halbschwingungen die Schwingung plötzlich ganz aufhört. Diese starke Dämpfung wird nämlich zum Teil hervorgerufen durch die mechanische Reibung der Dynamomaschine, die in jener Gleichung nicht berücksichtigt wurde. Um ihr Rechnung zu tragen, können wir zwei Wege einschlagen; wir können entweder, wie in § 11 A, uns parallel zum Kondensator einen innerhalb einer Periode konstanten Widerstand geschaltet denken, oder — und das ist das strengere Verfahren — wir nehmen statt dieses Widerstandes einen Verbraucher mit geeigneter Charakteristik an, in ähnlicher Weise, wie es in § 11 B geschah, um den Einfluß des antreibenden Drehstrommotors zu berücksichtigen.

1. Berücksichtigung der Reibung durch Annahme eines zum Kondensator parallelgeschalteten Widerstandes. Nach § 11 (Fig. 31, S. 99) wirkt das Reibungsbremsmoment so, als ob zu dem Kondensator, dem die fremd erregte Dynamomaschine in bezug auf ihr elektrisches Verhalten äquivalent ist, ein Widerstand W parallel geschaltet wäre. W ist allerdings nicht konstant, sondern hängt von der Ankerdrehzahl ω bzw. der Kondensatorspannung E ab; wir wollen aber zunächst W als konstant betrachten, bis wir die Differentialgleichung integriert haben, und erst nachträglich seine Inkonstanz berücksichtigen. Dann ist also unsere Anordnung dem in Fig. 36 gezeichneten Schema äquivalent; ist J der in L fließende Strom und E die Spannung über C, so gelten folgende beiden Gleichungen:

$$L\frac{dJ}{dt} + wJ + E = 0, \tag{4}$$

$$J = C\frac{dE}{dt} + \frac{E}{W}, \tag{5}$$

aus denen man durch Elimination von E erhält:

$$\frac{d^2J}{dt^2} + \left(\frac{w}{L} + \frac{1}{WC}\right)\frac{dJ}{dt} + \left(1 + \frac{w}{W}\right)\frac{1}{LC}J = 0. \tag{6}$$

Dieselbe Differentialgleichung gilt für ω und E. Die Differentialgleichung (6) ist formal identisch mit der bisher betrachteten Gleichung (2) des § 11, nur die Koeffizienten haben sich geändert; das Integral der Gleichung ist daher bis auf die vorkommenden Konstanten durch Gleichung (1) dieses Paragraphen gegeben

$$J = A \cdot e^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varphi\right). \tag{7}$$

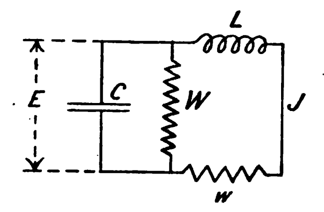


Fig. 36.

Für die Konstanten findet man in bekannter Weise, wenn wir wie früher die Koeffizienten der Gleichung (6) mit a_1 und a_2 bezeichnen, folgende Ausdrücke: Die Schwingungsdauer wird gleich

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{4}\left(\frac{w}{L} - \frac{1}{WC}\right)^2}}, \tag{8}$$

die Dämpfungskonstante

$$\delta = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{L} + \frac{1}{WC}\right), \tag{9}$$

und das logarithmische Dekrement

$$\mathfrak{d} = \delta \cdot \tau = \pi\left(\frac{w}{L} + \frac{1}{WC}\right)\sqrt{CL}, \tag{10}$$

wenn wir von der Beeinflussung der Schwingungsdauer durch die Dämpfung absehen.

Vergleichen wir die Ausdrücke (8) und (9) mit denjenigen, welche wir ohne Berücksichtigung der Reibungskräfte erhielten (Gl. (2) und (3)), so sehen wir, daß die Reibungskräfte (denen durch Einführung des Widerstandes W Rechnung getragen ist) folgende Wirkungen haben:

1) Sie vergrößern die Dämpfung der Schwingungen, und zwar um so stärker, je kleiner W ist.

2) Die Schwingungsdauer τ wird wenig beeinflußt. W wirkt in ähnlicher Weise, wie der Widerstand w des elektrischen Stromkreises, indem beide an und für sich eine geringe Vergrößerung von τ hervorrufen; jedoch kompensieren sich die Einflüsse von W und w zum Teil. Es gilt daher auch jetzt noch mit großer Annäherung die Thomsonsche Formel

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{2}$$

Diese Ergebnisse sind unter der Annahme eines konstanten Widerstandes W abgeleitet. Diese Annahme trifft aber keineswegs zu. Bestimmt man nämlich nach der auf S. 99 angegebenen Methode W bei verschiedenen Umdrehungszahlen der Dynamomaschine (indem man die Maschine als Motor laufen läßt und bei verschiedenen Spannungen e den im Gleichgewichtszustande aufgenommenen Strom i bestimmt), so erhält man die Kurve Fig. 37, welche den Strom i als Funktion der im Motor induzierten EMK. $E = e - iw_a$ darstellt; nach Gleichung (6), S. 99 ist daraus W zu erhalten als der Quotient $\frac{E}{i} = W$. Fig. 37 zeigt, daß W sehr stark mit E veränderlich ist; W schwankt zwischen dem Wert 0 (bei $E = 0$) und ca. 2500 Ω (bei $E = 200$ Volt).

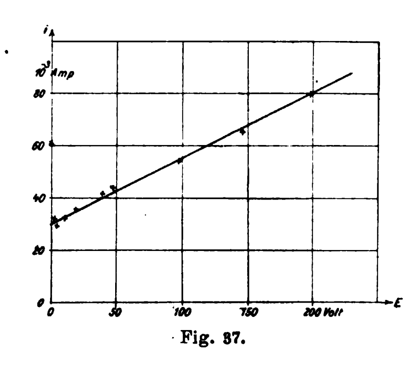


Fig. 37.

Trotzdem können wir die Ergebnisse der letzten Rechnung hier anwenden, wenigstens um über die zu erwartende Amplitudenabnahme Aufschluß zu erhalten. Wir können nämlich sagen, daß für diese Abnahme (Dämpfung) ein gewisser Mittelwert $\overline{W}$ von W maßgebend ist; da W mit abnehmendem E abnimmt, muß $\overline{W}$ um so kleiner sein, je kleiner der Mittelwert von E während der betrachteten Periode, d. h. je kleiner die Schwingungsamplitude ist. Daraus folgt, daß die Dämpfung, die um so größer ist, je kleiner $\overline{W}$ ist, mit abnehmender Amplitude zunimmt und schließlich über alle Grenzen wächst ($\overline{W} = 0$, $\frac{1}{W} = \infty$). Von einer ge-

wissen Amplitude ab muß daher die weitere Zustandsänderung aperiodisch erfolgen; so erklärt es sich, daß sich nur eine begrenzte Zahl von Schwingungen beobachten läßt. Zahlenmäßigen Aufschluß über die zu erwartende Amplitudenabnahme können wir aber so nicht erhalten, weil wir das Gesetz nicht kennen, nach dem der Mittelwert $\bar{W}$ aus den W zu bilden ist. Zur genaueren Behandlung des Schwingungsvorgangs müssen wir den oben angedeuteten zweiten Weg einschlagen.

2. Genauere Berücksichtigung der Reibungswiderstände. Dazu erinnern wir uns, daß man nach § 11 B ein genaueres Modell der Gleichstrommaschine erhält, wenn man sich zu einem Kondensator einen Leiter (hier Verbraucher) parallel geschaltet denkt, dessen Widerstand nicht mehr konstant ist, sondern bei dem Strom i und Spannung E durch eine Charakteristik zusammenhängen. Diese Charakteristik läßt sich in derselben Weise wie der Widerstand W experimentell ermitteln, indem man im Gleichgewichtszustande (bei dem die Kapazität keine Rolle spielt) zusammengehörige Werte von Strom und EMK. im Anker bestimmt; Fig. 37 gibt daher direkt die gesuchte Charakteristik. Will man die Schwingungsgleichung mit Rücksicht auf diesen Zusammenhang zwischen E und i ableiten, so muß man letzteren analytisch ausdrücken. Fig. 37 zeigt, daß die gefundenen Punkte der Charakteristik sehr angenähert auf einer geraden Linie liegen, deren analytischer Ausdruck die Gleichung

$$i = i_0 + \frac{E}{W_1}, \qquad \text{für } E > 0 \tag{11a}$$

ist, wobei

$$i_0 = 0{,}030 \text{ Amp.}$$

$$W_1 = 4000\ \Omega$$

ist. Da der Reibungswiderstand stets der Drehung entgegenwirkt und sein Betrag unabhängig von der Drehrichtung ist, muß i bei negativem E sein Zeichen umkehren, aber den gleichen Betrag behalten; wenn E durch Null geht, springt daher i unstetig von einem positiven auf einen negativen Wert; die i-Werte für negatives E liegen also nicht auf derselben Geraden wie bei positivem E, sondern auf einer anderen, die die Gleichung hat

$$i = -i_0 + \frac{E}{W_1}, \qquad \text{für } E < 0. \tag{11b}$$

Man kann auch unter diesen Voraussetzungen die Schwingungsgleichung ableiten. Da die Gleichung der Charakteristik für positive und negative E verschieden ist, wird es auch die Differentialgleichung; die letztere ist deshalb für positive und negative E gesondert zu integrieren. Wir können aber die Rechnung für beide Fälle gemeinsam durchführen, indem wir das Zeichen $\pm$ verwenden.

Hiernach ist die auf S. 107 gegebene Ableitung der Schwingungsgleichung folgendermaßen abzuändern: Die beiden Ausgangsgleichungen (4) und (5) lauten jetzt

$$L\frac{dJ}{dt} + wJ + E = 0 \tag{4}$$

$$J = C\frac{dE}{dt} \pm i_0 + \frac{E}{W_1}, \tag{5a}$$

woraus man durch Elimination von E erhält:

$$\frac{d^2J}{dt^2} + \left(\frac{w}{L} + \frac{1}{W_1 C}\right)\frac{dJ}{dt} + \frac{1 + \frac{w}{W_1}}{LC} J \mp \frac{i_0}{LC} = 0. \tag{6a}$$

Das Integral dieser Gleichung unterscheidet sich von dem der Gleichung (6), abgesehen davon, daß W durch W_1 ersetzt ist, nur durch ein konstantes Glied $\pm i_0 \dfrac{1}{1 + \frac{w}{W_1}} = \pm i_0'$; es lautet:

$$J = \pm \frac{i_0}{1 + \frac{w}{W_1}} + A \cdot e^{-\delta t} \sin\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \varphi\right), \tag{7a}$$

worin A und φ Integrationskonstanten sind. Gleichung (7a) sagt aus, daß die Schwingungen nicht um den Nullwert des Stromes, sondern um den Wert $\pm i_0'$ stattfinden. Diese Größe wechselt ihr Vorzeichen, wenn E durch Null geht, also wenn $\frac{dE}{dt}$ und damit J sein Maximum hat (dabei ist der Einfluß des Dämpfungsfaktors $e^{-\delta t}$ auf die Lage des Maximums vernachlässigt). Die Kurven des zeitlichen Stromverlaufs kann man daher aus einzelnen Stücken zusammensetzen, die je einer Halbschwingung entsprechen und von einem positiven Strommaximum bis zum nächsten negativen reichen oder umgekehrt. Die Nullinie dieser Halbschwingungen

ist abwechselnd $+i_0'$ und $-i_0'$; die Amplitude ist in jedem Stück durch den Anfangswert des Stromes J bestimmt, der gleich dem Endwert von J im vorhergehenden Intervall sein muß, weil J stetig ist. Ist am Ende eines Intervalls $|J| \leqq i_0'$, so muß die Schwingung aufhören, weil dann der Strom J nicht mehr hinreicht, den Motoranker zu drehen; ω und E bleiben von da ab dauernd null, J nimmt aperiodisch bis auf null ab. Damit sind alle Unterlagen zur Zeichnung der Schwingungskurve gegeben. Fig. 38 zeigt eine solche Schwingungskurve.

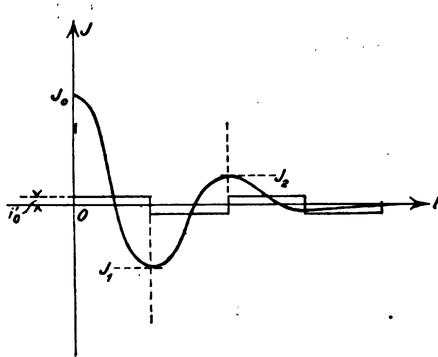


Fig. 38.

Bezeichnen wir mit

$$k = e^{\frac{\mathfrak{d}}{2}}$$

das von w und W_1 herrührende Dämpfungsverhältnis (bezogen auf eine Halbschwingung), so folgt aus der Figur, daß

$$|J_1| = \frac{|J_0| - i_0'}{k} - i_0'$$

und allgemein

$$|J_{n+1}| = \frac{|J_n| - i_0'}{k} - i_0' \tag{12}$$

ist.

3. Prüfung der Rechnung durch das Experiment. Um die Richtigkeit dieser Überlegungen an Hand des Experimentes zu prüfen, wollen wir mit Hilfe von Gl. (12) aus experimentell gefundenen Werten J_{n+1} und J_n die Größen k bzw. $\mathfrak{d} = 2\, ln\, k$ berechnen:

$$\mathfrak{d} = 2\, ln\, k = 2\, ln \frac{|J_n| - i_0'}{|J_{n+1}| + i_0'} \tag{13}$$

und das Ergebnis vergleichen mit der Zahl, die herauskommt, wenn man in Gl. (10) W_1 statt W einsetzt:

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{L} + \frac{1}{W_1 C}\right) \cdot \tau. \tag{10a}$$

Hier war

$w = 205\ \Omega$,

$W_1 = 4000\ \Omega$,

$i_0 = 0{,}030$ Amp., also $i_0' = \dfrac{i_0}{1 + \dfrac{w}{W_1}} = 0{,}0286$ Amp.

$L = \sim 300$ Henry,

$C = 0{,}0054$ Farad,

$\dfrac{\tau}{2} = 4{,}2$ sec (S. 106).

Beobachtet wurde[1])

$J_1 = 0{,}96$ Amp.,

$J_2 = 0{,}11$ „ ;

das dritte Maximum trat nicht mehr auf.

---

1) Die verwendete Schaltung zeigt nebenstehendes Schema (Fig. 39); darin bedeuten:

C die Kondensatormaschine
A den Strommesser, E_1 eine Batterie, S einen Schlüssel, R_1 einen Widerstand } für den Anstoßstrom.

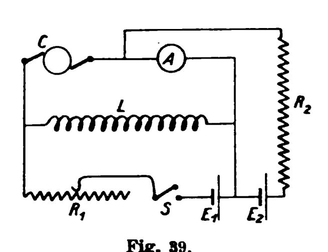


Fig. 39.

Batterie E_2 und Widerstand R_2 dienten nur dazu, die Ruhelage des Zeigers von A auf den Ausschlag 0,5 Amp. zu verlegen, damit die Ausschläge nach beiden Seiten beobachtet werden konnten. Die Angaben von A sind wegen der Trägheit und Dämpfung des beweglichen Systems natürlich ziemlich ungenau.

Aus diesen Zahlen berechnet sich

nach Formel (13) (Versuch): $\mathfrak{d}_1 = 3,8$,
nach Formel (10a) (Theorie): $\mathfrak{d}_2 = 3,1$,

also Übereinstimmung wenigstens der Größenordnung nach. Mehr war auch nicht zu erwarten, da einmal das zum Zusammensetzen der Kurvenstücke verwendete Verfahren nur annähernd richtig ist (streng richtig ist es nur, wenn $\mathfrak{d}$ sehr klein ist), und andererseits die Werte für L und w ziemlich unsicher sind; denn L hängt von der Stromstärke ab, während w bei veränderlichem Strom durch Hysteresis und Wirbelströme vergrößert erscheint.

B. Ungedämpfte Schwingungen. Die Übereinstimmung der Versuche mit der Theorie zeigt, daß wir hier tatsächlich elektrische Schwingungen vor uns haben, und zwar solche von einer bisher nicht erreichten großen Schwingungsdauer (Wiener[1]) erreichte maximal 2 Sekunden ganze Schwingungsdauer, während man hier mit größeren Maschinen die Größenordnung einer Minute bequem erreichen kann). Störend ist hier nur die mit abnehmender Amplitude so stark wachsende Dämpfung, die immer nur eine sehr kleine Zahl von Halbschwingungen zur Beobachtung kommen läßt. Man kann aber die Dämpfung beliebig klein machen, ja ihr sogar einen negativen Wert geben, wenn man die bekannten Mittel zur Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen anwendet. Wegen der beträchtlichen hin- und herschwingenden Energiemengen muß auch die den Schwingungen zugeführte Energie sehr groß sein. Daher eignet sich der Lichtbogen kaum für diesen Zweck; sehr gut dagegen läßt sich die von Fitzgerald[2]) u. a. angegebene Methode der Schwingungserzeugung mittels Hauptstromdynamo verwenden; dazu habe ich wieder den in den bisherigen Versuchen benutzten, auf S. 105 beschriebenen Motor als Kondensator benutzt, also das Magnetfeld mit konstantem Strome erregt; die Bürsten wurden mit den Klemmen einer kleinen Hauptstromdynamomaschine (eigentlich ein Motor, $^1/_3$ PS., 220 Volt) verbunden. Der Schwin-

1) O. Wiener, Physik. ZS. **8**, S. 752, 1907.

2) F. Fitzgerald, Vortrag in der Phys. Soc. vom 22. Januar 1892; Referat Lumière Electr. **43**, S. 386, 1892. Vgl. auch R. Rüdenberg, Physik. ZS. **8**, S. 668, 1907 und ebenda **9**, S. 556, 1908 (wo übrigens das Referat der Fitzgeraldschen Arbeit falsch zitiert ist); ferner O. M. Corbino, Physik. ZS. **8**, S. 924, 1907.

gungskreis bestand also aus der Magnetwicklung der Dynamomaschine als Selbstinduktion und dem Motoranker als Kapazität. Wurde die Dynamomaschine in Umdrehung versetzt, so traten von einer gewissen Drehzahl an tatsächlich kontinuierliche Schwingungen auf; der „Kondensatormotor" lief dann abwechselnd vorwärts und rückwärts.

Diese Erscheinung ist schon lange bekannt; bereits Fitzgerald[1]) erwähnt sie in der zitierten Arbeit; später ist sie von Mc. Allister[2]), dann von Ottenstein[3]) untersucht worden, ohne daß jedoch von diesen Autoren die wahre Ursache des Pendelns erkannt worden wäre.

a) Elementare Theorie der Schwingungen.

Wir wollen uns zunächst überlegen, welche Erscheinungen die Theorie erwarten läßt. Die benutzte Anordnung unterscheidet sich von derjenigen, mit der wir die gedämpften Schwingungen beobachteten, nur durch das Vorhandensein des Hauptstromgenerators; es gelten daher, wenn wir den Widerstand W zunächst wieder als konstant annehmen[4]), dieselben Gleichungen wie in jenem Falle (die Gl. (4) und (5) dieses Paragraphen), nur muß in der Gleichung der elektromotorischen Kräfte (Gl. (4)) rechts statt 0 die EMK. E_g des Hauptstromgenerators stehen. Wenn dessen Umdrehungszahl konstant gehalten wird, hängt E_g nur von dem Strome J ab; die Beziehung zwischen E_g und J ist gegeben durch eine Charakteristik nach Art von Fig. 8, S. 20. Wir wollen uns zunächst auf kleine Schwingungen um den Nullpunkt beschränken; dann ist das in Betracht kommende Stück der Charakteristik annähernd eine durch den Nullpunkt gehende Gerade mit der Gleichung:

$$E_g = AJ.$$

1) F. Fitzgerald, l. c.

2) A. S. Mc. Allister, American Electrician 1903; Referat Elektrot. ZS. 24, S. 353, 1903.

3) E. Arnold, Die Gleichstrommaschine. 2. Aufl., Berlin 1906, Bd. I, S. 622.

4) Diese Annahme ist hier viel eher zulässig, als bei den gedämpften Schwingungen, einmal, weil die Amplitude konstant und daher der Mittelwert $\overline{W}$ = const. ist, dann aber auch, weil hier ohne Schwierigkeit die Amplitude und damit $\overline{W}$ dauernd so groß gehalten werden kann, daß die durch W hervorgerufene Dämpfung klein ist. Wie die Überlegungen sich ändern, wenn wir die Inkonstanz von W genauer (durch Einführung der Charakteristik von W) berücksichtigen, wird weiter unten gezeigt werden.

Damit lautet Gleichung (4), wenn wir dieses neue Glied gleich auf die linke Seite bringen:

$$L \frac{dJ}{dt} + (w - A) J + E = 0. \qquad (4b)$$

Der Hauptstromgenerator wirkt also wie ein Leiter mit negativem Widerstande vom Betrage A, der von dem wirklichen Widerstande w abzuziehen ist. Wir können daher alle Resultate, die wir bei den gedämpften Schwingungen (S. 107) erhielten, ohne weiteres übernehmen, wenn wir in den Formeln nur überall w durch $(w - A)$ ersetzen. Die Theorie führt also auf eine gedämpfte[1]) Sinusschwingung mit der Dämpfungskonstante:

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{w - A}{L} + \frac{1}{WC} \right). \qquad (9b)$$

Die Gleichung zeigt, daß die Dämpfung um so kleiner ist, je größer A ist; und wenn A genügend groß ist, kann $\delta = 0$, d. h. die Schwingungsamplitude konstant werden. Dann haben wir also ungedämpfte Schwingungen. Dazu ist ein ganz bestimmtes A, also eine ganz bestimmte Umdrehungszahl des Hauptstromgenerators notwendig. Die Amplitude der Schwingung hängt dann nur von den Anfangsbedingungen, d. h. von der Stärke des Anstoßens ab. Ist A größer, so muß die Schwingungsamplitude dauernd zunehmen. Wir wollen uns hauptsächlich mit dem Falle konstanter Amplitude befassen; hier ist δ und damit auch $a_1 = 0$, und für die Schwingungsdauer erhält man daher (Gl. (8), S. 107):

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2}} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{A - w}{W}}}. \qquad (8b)$$

Die Schwingungsdauer muß sich also bis auf den Korrektionsfaktor $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A - w}{W}}}$ aus der Thomsonschen Formel berechnen lassen. Die Korrektion ist von derselben Größenordnung, wie die

1) Die Worte „gedämpft“ und „Dämpfung“ sind hier in erweitertem Sinne gebraucht, so daß sie den Begriff „Anschwellen“ (= negative Dämpfung) mit umfassen.

durch Dämpfung in einem Schwingungskreise hervorgerufene, also im allgemeinen klein; sie ist um so kleiner, je größer W ist, d. h. je kleiner die Reibungsverluste des „Kondensatormotors" sind.

Setzt man für C nach § 11, Gl. (3) (S. 97) $C = \frac{\Theta}{a^2}$ ein, so wird angenähert (wie bei den gedämpften Schwingungen, S. 105) wieder:

$$\tau = \frac{2\pi\sqrt{L\Theta}}{a}. \tag{2}$$

Die einfache Theorie ergibt also, daß bei einer und nur einer Umdrehungszahl des Hauptstromgenerators kontinuierliche, rein sinusförmige Schwingungen auftreten müssen, deren Amplitude nur von der Stärke des Anstoßens abhängt und deren Schwingungsdauer durch Gl. (2) gegeben ist.

b) Experimentelle Prüfung der Theorie.

Wenn man den wirklich stattfindenden Schwingungsvorgang daraufhin untersucht, inwieweit er diese Ergebnisse der Überlegung bestätigt, so findet man, daß die Übereinstimmung zwischen Wirklichkeit und Theorie nur sehr mangelhaft ist. Die Abweichungen sind in der Hauptsache die folgenden:

1. Die Schwingungen sind nicht sinusförmig, sondern die Schwingungskurve $\omega = f(t)$ hat etwa den Verlauf der Fig. 40, die aus Arnold[1]) entnommen ist: die Drehgeschwindigkeit steigt langsam an und fällt viel schneller ab.

2. Kontinuierliche Schwingungen konstanter Amplitude treten nicht nur bei einer bestimmten Umdrehungszahl des Generators auf, sondern innerhalb eines ganzen Intervalls von Umdrehungszahlen, nämlich bei allen Drehgeschwindigkeiten oberhalb eines gewissen „kritischen" Wertes.

3. Die Schwingungsamplitude hängt keineswegs von der Stärke des Anstoßens ab, vielmehr stellt sich bei jeder Umdrehungszahl des Hauptstromgenerators eine ganz bestimmte Amplitude ein, die um so größer ist, je größer die Umdrehungszahl des Generators (also je größer A) und je kleiner der Widerstand w ist.

4. Die Formel (2) für die Schwingungsdauer, nach der die Schwingungszahl pro Sek. $n = \frac{1}{\tau}$ proportional a sein müßte, wird

---

1) E. Arnold, l. c.

nur unvollkommen bestätigt; trägt man n als Funktion von a auf, so müßte man eine durch den Nullpunkt gehende gerade Linie erhalten, während das Experiment die durch Fig. 41 dargestellte

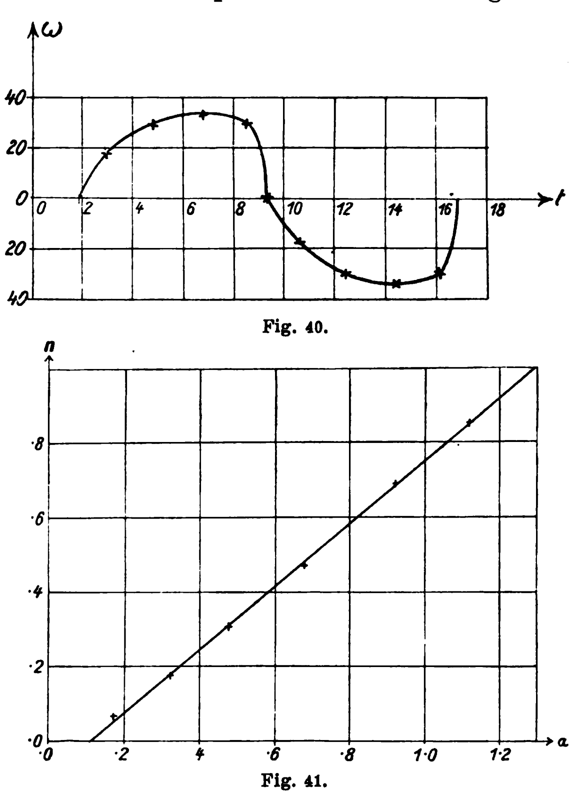


Fig. 40.

Fig. 41.

Kurve[1] ergab, die zwar annähernd eine gerade Linie ist, aber nicht durch den Nullpunkt geht.

---

1) Die Kurve wurde bei konstanter Umdrehungszahl des Hauptstromgenerators aufgenommen; τ wurde mit der Stoppuhr gemessen, während $a = \frac{E}{\omega}$ nach jeder Messung von τ dadurch bestimmt wurde, daß die „Kondensatormaschine“ durch einen besonderen Motor angetrieben und gleichzeitig Drehgeschwindigkeit ω und induzierte EMK. E gemessen wurde. Bei der Messung ist darauf zu achten, daß die Umdrehungszahl des Hauptstromgenerators wirklich konstant ist und nicht etwa bei Belastung desselben sinkt; man treibt deshalb den Generator am besten durch direkte Kupplung mit einem möglichst großen Motor an.

c) Erweiterung der Theorie auf Schwingungen endlicher Amplitude.

Ein großer Teil der zuletzt festgestellten Unterschiede zwischen Theorie und Versuch hat, ebenso wie in § 10B (S. 94), seine Ursache darin, daß die Schwingungsamplitude nicht, wie wir bisher annahmen, so klein ist, daß die Charakteristik des Hauptstromgenerators in dem in Betracht kommenden Intervall als geradlinig angesehen werden kann. Läßt man die Annahme der Kleinheit der Schwingungen fallen, so lassen sich die unter Nr. 1—3 aufgeführten Abweichungen zwanglos erklären.

1. Der nicht sinusförmige Verlauf der Schwingung kommt daher, daß der Quotient $A = \frac{E_g}{J}$ nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Stromes ist; daher ist jetzt die den Schwingungsvorgang beherrschende Differentialgleichung nicht mehr linear, ihr Integral kann daher keine einfache harmonische Funktion der Zeit mehr sein.

2. und 3. Das bisher verwendete Integral (7) der Schwingungsgleichung ist also, streng genommen, nicht mehr brauchbar. Trotzdem kann man, falls man nur über die Amplitude, nicht über die Form der Schwingungen annähernden Aufschluß erhalten will, die Ergebnisse der früheren Rechnung hier anwenden, indem man statt des veränderlichen A einen gewissen Mittelwert $\overline{A}$ in die Gleichungen einsetzt, den man während einer einzelnen Periode als konstant ansieht, der aber von der Amplitude der Schwingung abhängen kann, ähnlich, wie wir oben bei Behandlung der gedämpften Schwingungen statt des veränderlichen Widerstandes W einen Mittelwert $\overline{W}$ einführten, den wir während einer Periode als konstant betrachteten. Mit dieser Abänderung sind die Ergebnisse der früheren Rechnung also doch noch annähernd richtig; die Rechnung führt auch hier wieder auf eine gedämpfte Schwingung. Der Unterschied gegen früher ist nur der, daß die für den Verlauf der Schwingung charakteristischen Größen nicht mehr konstant, sondern abhängig von der Amplitude sind, weil sie die von der Amplitude abhängige Größe $\overline{A}$ enthalten. Insbesondere gilt das für die Dämpfungskonstante δ; nennen wir ihren neuen. dem Mittelwert $\overline{A}$ entsprechenden Wert $\overline{\delta}$, so gilt:

$$\overline{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{w - \overline{A}}{L} + \frac{1}{WC}\right) \cdot \tag{9c}$$

Daß diese Ersetzung von A durch einen, während einer Periode konstanten Mittelwert $\bar{A}$ streng richtig ist, solange man daraus nur auf die Zu- oder Abnahme der Amplitude schließen will, läßt sich folgendermaßen beweisen[1]:

Wir sehen von der Integration der den Vorgang beherrschenden Differentialgleichung zweiter Ordnung ganz ab und setzen nur voraus, daß das Integral eine irgendwie verlaufende Schwingung ist, deren Amplitude zunehmen oder abnehmen oder konstant bleiben kann. Wir fragen: welche Größe ist maßgebend für die Amplitudenzu- oder -abnahme (kurz, für die Dämpfung) der Schwingung?

Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir die Energiebilanz des Vorgangs für eine Periode $t = 0$ bis $t = \tau$ auf:

Es muß die zugeführte Energie $\int_0^\tau E_g J\, dt = \int_0^\tau A J^2 dt$ gleich sein der Summe der in Joulesche Wärme umgesetzten Energie $\int_0^\tau \left(J^2 w + \frac{E^2}{W}\right) dt$ und der Zunahme Δ der in der Selbstinduktion L und der Kapazität C aufgespeicherten magnetischen und elektrostatischen Energie $\frac{1}{2} L J^2 + \frac{1}{2} C E^2$ (diese Energie ist um so größer, je größer die Schwingungsamplitude ist):

$$\int_0^\tau A J^2 dt = \int_0^\tau \left(w J^2 + \frac{E^2}{W}\right) dt + \Delta \left(\tfrac{1}{2} L J^2 + \tfrac{1}{2} C E^2\right). \quad (14)$$

Ist die Amplitude konstant, so ist die aufgespeicherte Energie am Schlusse einer vollen Periode die gleiche wie zu Anfang, ihre Zunahme Δ ist also gleich null; daher lautet die Bedingung dafür, daß die Amplitude konstant ist:

$$\Delta = \int_0^\tau A J^2 dt - \int_0^\tau \left(w J^2 + \frac{E^2}{W}\right) dt = 0. \quad (15)$$

---

1) In ganz ähnlicher Weise läßt sich der Beweis dafür führen, daß es zulässig ist, den mit E veränderlichen Widerstand W durch einen konstanten Mittelwert zu ersetzen. Wir wollen aber zunächst W als wirklich konstant voraussetzen.

Ist diese Gleichung nicht erfüllt, so muß nach Gl. (14) nach Ablauf einer Periode eine Änderung der aufgespeicherten Energie, und damit der Amplitude eingetreten sein, und zwar muß, wenn in Gl. (15) die linke Seite positiv ist (wenn also die zugeführte Energie größer als die in den Widerständen verbrauchte ist), eine Zunahme der aufgespeicherten Energie und der Amplitude eingetreten sein, sonst eine Abnahme. Maßgebend für die Richtung einer etwa stattfindenden dauernden Amplitudenänderung ist daher das Vorzeichen der Größe

$$\Delta = \int_0^\tau A\,J^2\,dt - \int_0^\tau \left(w\,J^2 + \frac{E^2}{W}\right)dt$$

oder, da w und W als konstant angenommen werden:

$$\Delta = \int_0^\tau A\,J^2\,dt - w\int_0^\tau J^2\,dt - \frac{1}{W}\int_0^\tau E^2\,dt. \tag{16}$$

Wenn A konstant ist, können wir auch das erste Integral zu

$$A\int_0^\tau J^2\,dt$$

umformen; hier, wo A nicht konstant ist, definieren wir einen Mittelwert $\bar{A}$ von A so, daß

$$\bar{A}\int_0^\tau J^2\,dt = \int_0^\tau A\,J^2\,dt \tag{17}$$

ist; dann wird der Ausdruck für Δ (Gl. (16)) formal der gleiche wie für konstantes A, und demnach auch die Bedingung dafür, daß die Amplitude zunimmt oder abnimmt, dieselbe wie die für konstantes A. Damit ist eigentlich alles bewiesen; wir wollen nur noch zeigen, in welchem Zusammenhang die durch Gleichung (16) definierte Größe Δ, deren Vorzeichen für die Richtung der Amplitudenänderung maßgebend ist, mit der durch Gleichung (9c) bestimmten Dämpfungskonstante δ zusammenhängt. Division von Gl. (16) durch $-L\int_0^\tau J^2\,dt$ gibt:

$$\frac{-\Delta}{L\int\limits_0^\tau J^2 dt} = \frac{w-\bar{A}}{L} + \frac{1}{WL}\,\frac{\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau E^2 dt}{\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau J^2 dt}$$

$$= \frac{w-\bar{A}}{L} + \frac{1}{WL}\,\frac{\bar{E}^2}{\bar{J}^2}, \tag{16a}$$

worin $\bar{E}$ und $\bar{J}$ den quadratischen Mittelwert (Effektivwert) von Wechselspannung E und Wechselstrom J bedeuten. Da die mittlere elektrostatische Energie $\frac{1}{2}C\bar{E}^2$ annähernd gleich der mittleren magnetischen Energie $\frac{1}{2}L\bar{J}^2$ sein muß, folgt

$$\frac{\bar{E}^2}{L\bar{J}^2} = \frac{1}{C}$$

und damit geht Gl. (16a) über in

$$\frac{-\Delta}{2L\bar{J}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{w-\bar{A}}{L} + \frac{1}{WC}\right) = \bar{\delta}. \tag{16b}$$

Das ist der einfache Zusammenhang zwischen Δ und $\bar{\delta}$. Aus der Gleichung folgt: weil bei negativem Δ die Amplitude abnimmt, so muß bei positivem $\bar{\delta}$ Abnahme, bei negativem $\bar{\delta}$ Zunahme der Amplitude eintreten, genau so, wie es bei der für konstantes A geltenden Dämpfungskonstante δ galt.

Damit ist streng bewiesen, daß in der Tat auch bei veränderlichem A für die Amplitudenänderung dieselbe Dämpfungskonstante δ maßgebend ist, wie bei konstantem A, wenn man nur in der Bestimmungsgleichung (9b) für δ A ersetzt durch den durch Gleichung (17) bestimmten Mittelwert:

$$\bar{A} = \frac{\int\limits_0^\tau A J^2 dt}{\int\limits_0^\tau J^2 dt} = \frac{\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau A J^2 dt}{\bar{J}^2} \tag{17a}$$

(d. h. $\bar{A}$ ist gleich der mittleren Leistung des Hauptstromgenerators, dividiert durch das Quadrat des Effektivstromes).

Wir kehren zurück zur Gleichung der Dämpfungskonstante. Auch jetzt wird für ein ganz bestimmtes $\bar{A}$, wie oben, $\bar{\delta} = 0$, d. h. die Schwingungsamplitude konstant; da aber $\bar{A}$ nicht mehr allein von der Drehgeschwindigkeit des Generators, sondern auch von der Schwingungsamplitude abhängt, folgt, daß bei gegebener Drehzahl des Generators dieser Wert von $\bar{A}$ nur bei einem bestimmten Amplitudenwerte erreicht wird, also nur eine bestimmte Schwingungsamplitude konstant bleiben kann. (Punkt 3 der Abweichungen S. 116.)

Wir müssen nun noch wissen, wie $\bar{A}$ von der Schwingungsamplitude abhängt. Dazu wollen wir zunächst an Hand von Fig. 42, in der die Charakteristik des Hauptstromgenerators (Fig. 8, S. 20) noch einmal gezeichnet ist, den Zusammenhang zwischen A und J untersuchen. Zu einem Punkte P der Charakteristik findet man den zugehörigen Wert von A, indem man P mit dem Ursprung O verbindet; ist α der Winkel zwischen OP und der Abszissenachse, so ist

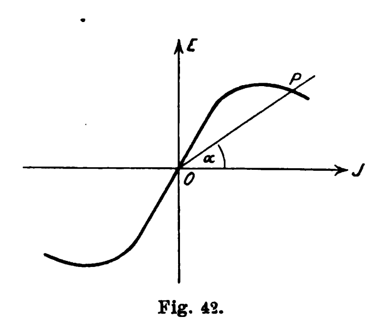


Fig. 42.

$$A = \frac{E_g}{J} = \operatorname{tg} \alpha.$$

A ist also um so größer, je größer α ist. Aus Fig. 42 folgt, daß A für den Strom $J = 0$ am größten ist und mit zunehmendem Absolutwert des Stromes abnimmt. Für den Mittelwert $\bar{A}$ folgt aus Gl. (17), daß er zwischen dem größten und dem kleinsten Werte, den A in dem in Betracht kommenden Intervalle annimmt, liegen muß. Für sehr kleine Stromamplitude muß daher $\bar{A}$ gleich dem Maximalwert von A sein; je größer die Amplitude wird, um so mehr kleinere Werte von A tragen zu dem Mittelwerte $\bar{A}$ bei, desto kleiner muß also $\bar{A}$ werden. Der Zusammenhang zwischen $\bar{A}$ und der Amplitude ist also ähnlich demjenigen zwischen A und dem Strom; auch $\bar{A}$ nimmt mit zunehmender Amplitude ab.

Aus Gl. (9c) folgt dann, daß $\bar{\delta}$ mit zunehmender Amplitude zunehmen muß. Wir wollen nun einmal annehmen, das System führe Schwingungen aus und $\bar{A}$ sei so groß, daß $\bar{\delta}$ negativ ist; dann nimmt die Schwingungsamplitude zu. Damit sinkt aber $\bar{A}$

und wächst δ; das Anwachsen der Amplitude kann daher nur so lange dauern, bis infolge der Abnahme von $\overline{A}$ $\overline{\delta} = 0$ geworden ist. Es stellt sich also bei jeder genügend großen Drehzahl des Generators schließlich eine konstante Schwingungsamplitude ein. Vergrößerung von $\overline{A}$ (d. h. der Drehzahl) oder Verringerung von w hat daher nur in den ersten Augenblicken ein Anwachsen der Schwingungsamplitude zur Folge; nachher wird der Zustand wieder bei einer größeren Amplitude stationär.

Damit ist erklärt, daß bei allen genügend großen Drehzahlen des Generators stationäre Schwingungen möglich sind, und daß deren Amplitude um so größer ist, je größer diese Drehzahl und je kleiner der Widerstand w des Stromkreises ist (Punkt 2 und 3 der Abweichungen auf S. 116).

Auf die unter Nr. 4 aufgeführte Abweichung werden wir später (unter e)) eingehen.

d) Die Stabilität der Schwingungen.

Wenn, wie unter c) erörtert, wirklich die bei größerer Amplitude in Betracht kommende Krümmung der Charakteristik des Hauptstromgenerators die Ursache für die Abweichung zwischen Theorie und Versuch bildet, so müßte man diese Abweichung beliebig klein machen können, wenn man sich auf die Beobachtung genügend kleiner Amplituden beschränkte. Der Versuch läßt sich aber in dieser Weise praktisch nicht ausführen, weil sich Schwingungen kleiner Amplitude nicht dauernd aufrecht erhalten lassen; der Zustand konstanter kleiner Schwingungsamplitude ist instabil.

Um das zu erkennen, wollen wir die Bedingung der Stabilität stationärer Schwingungen für den vorliegenden Fall ableiten. Die dazu nötige Überlegung haben wir im vorhergehenden (unter c)) schon angestellt; dort zeigten wir ja, daß der Schwingungszustand unter den dort gemachten Voraussetzungen (wenn die Generatorcharakteristik durch Fig. 42 gegeben und W konstant ist) stabil ist, da, wenn er nicht realisiert ist, das System von selbst zu ihm übergeht. Die Voraussetzung, aus der wir diese Stabilität folgern konnten, war die, daß die Dämpfungskonstante $\overline{\delta}$ der Schwingungen mit zunehmender Amplitude zunahm; denn dann wird, wenn z. B. die Amplitude größer ist als der stationäre Wert, auch $\overline{\delta}$ größer als dem stationären Zustand ($\overline{\delta} = 0$) ent-

spricht, d. h. positiv; daher nimmt die Amplitude ab, das System nähert sich dem stationären Zustande. Wenn umgekehrt $\bar{\delta}$ mit zunehmender Amplitude abnimmt, so muß $\bar{\delta}$, sobald die Amplitude größer ist als der stationäre Betrag, negativ werden, d. h. die Amplitude muß weiter wachsen, das System entfernt sich immer mehr vom Gleichgewichtszustande, das Gleichgewicht ist labil. Das Kriterium für die Stabilität eines stationären Schwingungszustandes ist also das: die Dämpfungskonstante $\bar{\delta}$ muß mit zunehmender Amplitude zunehmen.

In der Tat ist nun bei kleiner Schwingungsamplitude dieses Kriterium nicht erfüllt, vielmehr nimmt $\bar{\delta}$ mit zunehmender Amplitude zunächst ab, und zwar aus zwei Gründen, nämlich

1. weil $\bar{A}$ bei kleinen Amplituden zunimmt mit zunehmender Amplitude. Aus der Charakteristik Fig. 42 folgt das allerdings nicht; diese gibt den Zusammenhang zwischen E_g und J nur bei großen Schwingungsamplituden annähernd wieder. In Wirklichkeit ist vielmehr, da die Kurve $E_g = E_g\,(J)$ bis auf den Maßstab mit der Magnetisierungskurve des magnetischen Kreises des Hauptstromgenerators übereinstimmt, der Quotient $\frac{E_g}{J} = A$ proportional der mittleren magnetischen Permeabilität μ des Kraftlinienweges. Der Mittelwert $\bar{A}$ von A muß daher einem Mittelwert $\bar{\mu}$ von μ proportional sein, und zwar folgt aus der für die Bildung des Mittelwertes $\bar{A}$ maßgebenden Gleichung (17), daß der hier in Betracht kommende Mittelwert $\bar{\mu}$ derselbe sein muß, wie derjenige, der für den Wechselwiderstand einer Eisen enthaltenden Drosselspule maßgebend ist; $\bar{A}$ muß daher in derselben Weise von der Stromamplitude abhängen, wie dieser Wechselwiderstand von dem Effektivwerte des Wechselstroms abhängt. Diesen bekannten Zusammenhang zeigt Fig. 43: wenn die Stromamplitude von null an wächst, muß $\bar{A}$ zunächst zunehmen bis zu einem Maximum und dann allmählich bis zu sehr kleinen Werten abnehmen.

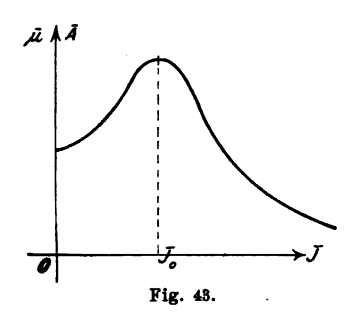


Fig. 43.

Da nach Gleichung (9c) $\bar{\delta}$ sich im umgekehrten Sinne ändert wie $\bar{A}$, so muß bei kleinen Amplituden $\bar{\delta}$ mit zunehmender Amplitude

abnehmen, bei großen Amplituden wachsen. Es ist also in der Tat bei kleinen Amplituden das Stabilitätskriterium nicht erfüllt; stabil kann der Schwingungszustand nur sein, wenn der Mittelwert $\overline{J}$ des Stromes größer ist als der dem Maximalwert von $\overline{A}$ entsprechende Betrag $\overline{J_0}$ (Fig. 43).

Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Beobachtung: die Schwingungen ließen sich nur dann aufrecht erhalten, wenn der quadratische Mittelwert des Stromes größer war als etwa 0,3 Ampere[1]). War der Strom beim stationären Schwingungszustand nicht viel größer als 0,3 Ampere, so traten beim Einschalten die Schwingungen nicht von selbst ein, sondern der Kondensatormotor drehte sich zunächst langsam in einer Richtung; erst wenn man (durch Festhalten des Motors) einen genügend großen Stromstoß erzeugte, traten die Schwingungen auf.

2. Die zweite Ursache für die Instabilität kleiner Schwingungen ist die Inkonstanz des Widerstandes W. Berücksichtigt man diese Inkonstanz in derselben Weise, wie wir es oben bei Behandlung der gedämpften Schwingungen (S. 108) taten, indem man W durch einen innerhalb einer Periode konstanten, aber von der Amplitude abhängigen Mittelwert $\overline{W}$ ersetzt, so ergibt sich, wie dort, daß die Veränderlichkeit von W mit der Amplitude eine Zunahme von $\overline{\delta}$ mit abnehmender Amplitude bewirkt. Demnach haben wir auch dann noch Instabilität, wenn $\overline{A}$ mit zunehmender Stromamplitude ein wenig abnimmt; stabil wird der Zustand erst bei so großen Amplituden, daß die Zunahme, die $\overline{\delta}$ bei zunehmender Amplitude infolge der Abnahme von $\overline{A}$ erfährt, größer ist, als die von der Änderung von $\overline{W}$ herrührende Abnahme; der Mindestwert des mittleren Stromes, der zur Erzielung eines stabilen Zustandes erforderlich ist, wird dadurch vergrößert. Das Ergebnis dieser Stabilitätsbetrachtung ist also das:

Wenn überhaupt Schwingungen auftreten, so stellt sich ihre Amplitude stets von selber so ein, daß $\overline{A}$ und $\overline{\mu}$ mit zunehmender Amplitude abnehmen, d. h. daß die magnetische Sättigung des Eisens beim Hauptstromgenerator merklich wird; es muß daher stets die Charakteristik dieses Generators erheblich von einer geraden Linie abweichen, und die Rechnung, die wir unter der Annahme einer geradlinigen Charakteristik ausführten, kann nur ein rohes Bild der Wirklichkeit geben.

---

1) Gemessen mit einem möglichst trägen Hitzdrahtinstrument.

e) Weitere Ursachen für die Abweichung zwischen Theorie und Versuch.

Wir haben bis jetzt für alle Unterschiede, die wir zwischen Theorie und Versuch beobachteten, eine befriedigende Erklärung gefunden, bis auf den unter Nr. 4 aufgeführten Punkt, daß die Kurve, welche die beobachtete Schwingungszahl als Funktion der Größe a darstellt (Fig. 41), keine durch den Nullpunkt gehende Gerade ist. Man könnte daran denken, auch hierfür die Veränderlichkeit des A im Laufe einer Periode, oder die Veränderlichkeit des Mittelwertes $\overline{A}$ mit der Amplitude verantwortlich zu machen. Nun spielt aber, wie auf S. 115/116 gezeigt, in der Formel für die Schwingungsdauer (Gl. 8b) A eine so geringe Rolle (namentlich wenn W groß ist, und das ist ja bei den hier stets vorhandenen großen Amplituden immer der Fall), daß das sehr unwahrscheinlich ist. Dagegen bewirkt die Veränderlichkeit des μ beim Hauptstromgenerator, daß auch die Selbstinduktion L seiner Feldwicklung nicht konstant ist, sondern sich im Laufe einer Periode ändert. In der Rechnung werden wir auch für L einen Mittelwert $\overline{L}$ annehmen, der in derselben Weise mit der Stromamplitude zusammenhängt, wie der Mittelwert $\overline{\mu}$ (Fig. 43), also im Gebiete praktisch realisierbarer Amplituden mit zunehmender Amplitude abnimmt. Wenn also die schlechte Übereinstimmung der Kurve Fig. 41 mit der Theorie in der Veränderlichkeit von L ihre Ursache hätte, so wäre eine starke Abhängigkeit der Schwingungsdauer oder der Schwingungszahl von der Amplitude zu erwarten und zwar Zunahme der Schwingungszahl $n = \frac{1}{\tau}$ mit zunehmender Amplitude. Wie der Versuch (Kurve I und II in Fig. 44) zeigt, trifft das aber in Wirklichkeit keineswegs zu, vielmehr ergibt Verdoppelung des Stromes eine Zunahme der Schwingungszahl von nur wenigen Prozenten (der Sinn der Änderung ist mit der Überlegung in Übereinstimmung), und gerade bei kleinen Schwingungszahlen n, wo die Abweichung der Kurve Fig. 41 von einer durch O gehenden Geraden prozentual am stärksten ist, ist der Einfluß der Stromamplitude auf die Schwingungszahl n verschwindend gering. Die Veränderlichkeit der magnetischen Sättigung des Eisens kann daher nicht die Ursache dafür sein, daß die Kurve $n = n(a)$ keine durch den Nullpunkt gehende Gerade ist, daß also die Gleichung (2) durch unsere Versuche nicht bestätigt wird. Wir müssen uns

deshalb nach anderen Ursachen für diese Unstimmigkeit umsehen. In Betracht kommen könnten hier drei solcher Ursachen: einmal die Ankerrückwirkung der „Kondensatormaschine", dann die im Hauptstromgenerator auftretenden Wirbelströme, endlich die Inkonstanz von W. Diese drei Umstände beeinflussen die Schwingungsdauer in folgender Weise:

1. Die Ankerrückwirkung der „Kondensatormaschine" bewirkt, daß die EMK. dieser Maschine mit zunehmendem Strome kleiner wird; das bedeutet, daß a und somit die Kapazität $\frac{\Theta}{a^2}$ nicht nur von der Magneterregung, sondern auch vom Strome J

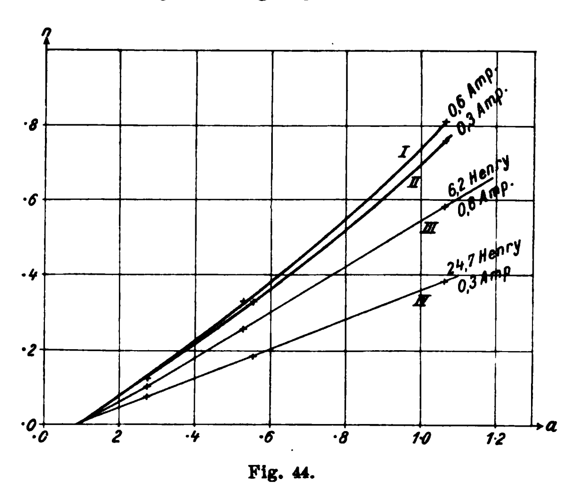


Fig. 44.

abhängt und sich mit ihm innerhalb einer Periode ändert. Der Sinn der Änderung ist der, daß a mit zunehmendem Strome kleiner wird, unabhängig von der Stromrichtung; die Kapazität erscheint daher größer, als dem von uns gemessenen a entsprechen würde; die Schwingungszahl muß in Wirklichkeit kleiner sein, als die aus Gl. (2) berechnete, und zwar muß die prozentuale Abweichung um so größer sein, je kleiner a ist, weil dann die Ankerrückwirkung am stärksten ist. Auf diese Weise erklärt es sich wohl, daß die Kurven der Figuren 41 und 44 anscheinend nicht durch den Nullpunkt gehen. Natürlich hat die Veränderlichkeit der Kapazität C im Laufe einer Periode auch mit Schuld an der Abweichung der Schwingungskurve von der Sinusform.

2. Die Wirbelströme im Hauptstromgenerator. Eine

zweite Ursache für die Nichtbestätigung der Gleichung (2) durch die Versuche können die Wirbelströme bilden, die in den massiven Eisenteilen des Hauptstromgenerators auftreten. Sie bewirken eine scheinbare Vergrößerung des Widerstandes w und Verkleinerung der Selbstinduktion L, stören aber an und für sich die Sinusform der Schwingungen nicht. Ihre Wirkung ist um so stärker, je höher die Frequenz ist, sie bewirken also eine Zunahme von w und Abnahme von L mit steigender Schwingungszahl n. Außerdem verkleinern sie, da sie das Magnetfeld des Generators schwächen, seine EMK. und damit die Größe A bezw. den Mittelwert $\bar{A}$; auch $\bar{A}$ muß daher mit steigender Schwingungsfrequenz n abnehmen.

Die Zunahme von w und Abnahme von $\bar{A}$ mit steigendem n machte sich bei den Versuchen dadurch bemerkbar, daß bei größerem n eine größere Umdrehungszahl des Hauptstromgenerators erforderlich war, um dauernde Schwingungen zu unterhalten. Die Abnahme von L mit steigendem n muß bewirken, daß n mit wachsendem a stärker ansteigt, als es konstantem L entsprechen würde; dieser Umstand kann also auch mit für den Verlauf der Kurve Fig. 41 verantwortlich sein. Daß L wirklich von der Schwingungszahl abhängt, ließ sich dadurch zeigen, daß in den Schwingungskreis eine zusätzliche Selbstinduktionsspule L_0 (zwei in Serie bezw. parallel geschaltete Sekundärspulen eines technischen Transformators, $L_0 = 24$ bezw. 6 Henry bei 0,3 bezw. 0,6 Ampere) eingeschaltet und wieder die Schwingungszahl n als Funktion der Größe a bestimmt wurde. Die erhaltenen Kurven sind in Fig. 44 (Kurve III und IV) eingezeichnet. Wäre L konstant, so müßte man z. B. aus Kurve I und III für jeden Wert von a die Größe von L berechnen können; denn wenn wir mit n_I und n_{III} die aus Kurve I und III entnommenen Schwingungszahlen für ein bestimmtes a bezeichnen, so ist

$$n^I = \frac{a}{2\pi\sqrt{\Theta L}}$$

$$n_{III} = \frac{a}{2\pi\sqrt{\Theta(L+L_0)}},$$

also

$$\frac{n_I^2}{n_{III}^2} = \frac{L+L_0}{L} = 1 + \frac{L_0}{L}$$

$$L = \frac{L_0}{\left(\frac{n_I}{n_{III}}\right)^2 - 1}. \tag{18}$$

Nach dieser Formel ist folgende Tabelle berechnet:

a	Aus I und III		Aus II und IV	
	$\bar{n}$	L	$\bar{n}$	L
1,06	0,7	6,5	0,57	8,3
0,54	0,3	8,9	0,25	9,8
0,27	0,115	13,2	0,10	15,1

Darin ist $\bar{n}$ das Mittel von n_I und n_{III}, bzw. n_{II} und n_{IV}. Die Zahlen zeigen, daß L wirklich nicht konstant ist, sondern mit abnehmendem $\bar{n}$ zunimmt, wie es nach der obigen Überlegung zu erwarten ist; gleichzeitig folgt daraus allerdings die Nichtanwendbarkeit der Formel (18), so daß die Zahlen der Tabelle nur als sehr rohe Annäherungen zu betrachten sind.

3. Endlich könnte noch ein Umstand die Schwingungsdauer beeinflussen, mit dem wir uns bereits oben bei der Diskussion der Stabilität der Schwingungen befaßt haben, nämlich die Veränderlichkeit von W (W war der Widerstand, den wir uns parallel zum Kondensator geschaltet dachten, um die in der „Kondensatormaschine" auftretenden Reibungswiderstände zu berücksichtigen). Um den etwaigen Einfluß dieses Umstandes auf die Schwingungszahl zu finden, genügt nicht mehr das früher verwendete einfache Verfahren, bei dem W innerhalb einer Periode als konstant angenommen wurde; vielmehr ist hier ein Verfahren anzuwenden, das dem in Teil A dieses Paragraphen unter Zfr. b 2 erläuterten ähnlich ist, indem wir für die Beziehung zwischen Strom und Spannung an den Enden des Widerstandes W die dort gefundenen Gleichungen (11a) und (11b)

$$i = \pm i_0 + \frac{E}{W_1}$$

verwenden. Darin gilt das $+$-Zeichen für positives E, das $-$-Zeichen für negatives E. Man erhält so, wie oben, für positives und negatives E je eine verschiedene Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung; die ganze Schwingungskurve kann man dadurch erhalten, daß man sie aus einzelnen Halbschwingungen zusammensetzt. Dieses Zusammensetzen nach dem angenäherten, oben benutzten Verfahren auszuführen, hat aber hier nicht viel Zweck, da jenes Verfahren uns über die Schwingungsdauer gar keine Auskunft geben kann (denn bei ihm wird der Einfluß von

W auf die Schwingungsdauer ja gerade vernachlässigt); vielmehr ist die Zusammensetzung streng auszuführen. Aus später zu besprechenden Gründen sehen wir von einer vollständigen Wiedergabe dieser Rechnung ab; es sei nur kurz ihr Gedankengang angegeben:

Die hier geltenden Differentialgleichungen erhält man aus den beiden früheren Gleichungen (4) und (5a) (S. 110), wenn man darin w durch $w - A$ ersetzt. Eliminiert man aus diesen den Strom J, so erhält man eine der dortigen Gleichung (6a) analoge Differentialgleichung für E

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \left(\frac{w-A}{L} + \frac{1}{W_1 C}\right)\frac{dE}{dt} + \left(1 + \frac{w-A}{W_1}\right)\frac{1}{LC}E \pm i_0 \frac{w-A}{LC} = 0. \quad (19)$$

Ihr Integral lautet, analog wie dort (Gl. 7a):

$$E = \pm E_0 + e^{-\delta t}(P \cos \nu t + Q \sin \nu t) \quad (20)$$

worin

$$E_0 = i_0 \frac{A - w}{1 - \frac{A - w}{W_1}} \quad (21)$$

und das Vorzeichen von E_0 gleich dem von E ist. δ ist die durch die frühere Gleichung (9b) bestimmte Dämpfungskonstante; ν ist gesetzt zur Abkürzung für $\frac{2\pi}{\tau}$, wobei τ die durch die frühere Gleichung (8) bestimmte Schwingungsdauer ist, d. h. diejenige Schwingungsdauer, die man erhält, wenn man statt des variablen Widerstandes W einen konstanten Widerstand W_1 annimmt. P und Q sind Integrationskonstanten, die vorläufig noch unbestimmt sind.

Wir wollen nun das „Aneinandersetzen" der beiden, für positives und negatives E geltenden Lösungen (20) nicht allgemein, sondern gleich für den speziellen Fall stationärer Schwingungen ausführen; d. h. wir wollen von vornherein die Bedingung einführen, daß die zusammengesetzte Schwingungskurve eine rein periodische Funktion der Zeit darstellen soll, deren Periodendauer gleich T ist (T hat natürlich mit der früher erhaltenen Periodendauer $\tau = \frac{2\pi}{\nu}$ nichts zu schaffen). Da diese Zeitfunktion symmetrisch sein muß, so ist der mathematische Ausdruck für diese Bedingung

$$E = f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) = f(t - T) \cdot \quad (22)$$

Wählen wir den Nullpunkt der Zeit so, daß mit $t=0$ eine positive Halbschwingung beginnt, so läßt sich Bedingung (22) mit den beiden Gleichungen (20) zu folgender Gleichung für E kombinieren:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } 0 \leqq t \leqq \frac{T}{2}: \\ E = + E_0 + e^{-\delta t}(P\cos\nu t + Q\sin\nu t); \\ \text{für } \frac{T}{2} \leqq t \leqq T: \\ E = - E_0 - e^{-\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)}\left(P\cos\nu\left[t-\frac{T}{2}\right] + Q\sin\nu\left[t-\frac{T}{2}\right]\right). \end{array}\right\} \quad (23)$$

In diesen Gleichungen sind noch unbekannt die drei Konstanten P, Q, T. Man findet sie, indem man jetzt die speziellen Grenzbedingungen einführt, die an den Stellen, wo die beiden Lösungen „aneinandergesetzt" sind, z. B. bei $t=\frac{T}{2}$, gelten; diese Bedingungen lauten: Beide Gleichungen (23) müssen für $t=\frac{T}{2}$ für E den Wert null ergeben (weil E für $t<\frac{T}{2}$ positiv, für $t>\frac{T}{2}$ negativ und weil es stetig sein muß); außerdem muß an der Grenze der Strom J stetig sein. Der mathematische Ausdruck für diese Bedingungen lautet, wenn wir E und J als Zeitfunktionen $E(t)$ und $J(t)$ schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} E\left(\frac{T}{2}-0\right)=0 \\ E\left(\frac{T}{2}+0\right)=0 \\ J\left(\frac{T}{2}-0\right)=J\left(\frac{T}{2}+0\right). \end{array}\right\} \quad (24)$$

Setzt man in diese drei Gleichungen E und J aus den Gleichungen (23) ein, so erhält man für die Unbekannten P, Q und T gerade drei Gleichungen, aus denen sie sich berechnen lassen. Damit ist dann der ganze Schwingungsvorgang durch die Gleichungen (23) gegeben. Führt man die Rechnung durch, so erhält man P und Q explizite als Funktionen von T, während man für T eine transzendente Gleichung erhält, die graphisch gelöst werden kann. Man findet so: erstens, daß T mit abnehmender Amplitude zunimmt, aber nicht wesentlich größer werden kann als das $1^1|_2$ fache der Schwingungsdauer bei reiner Widerstandsdämpfung (w und

W konstant); zweitens, daß die Schwingungsamplitude um so kleiner ist, je größer A ist und umgekehrt; drittens, daß die Schwingungen nur von einem gewissen Amplitudenwerte an möglich sind. Der erste Punkt zeigt, daß der Einfluß der Reibung auf die Schwingungsdauer zu klein ist, als daß er die Abweichung der Kurve $n = n\,(a)$ (Fig. 41) von einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden erklären könnte. Der zweite Punkt bestätigt die schon früher (bei der Untersuchung der Stabilität der Schwingungen, S. 125) gemachte Bemerkung, daß diese Schwingungen, falls A, w und L wirklich, wie wir voraussetzten, konstant wären, labil sein müßten. Das tatsächlich beobachtete Auftreten stabiler Schwingungen beweist, wie schon

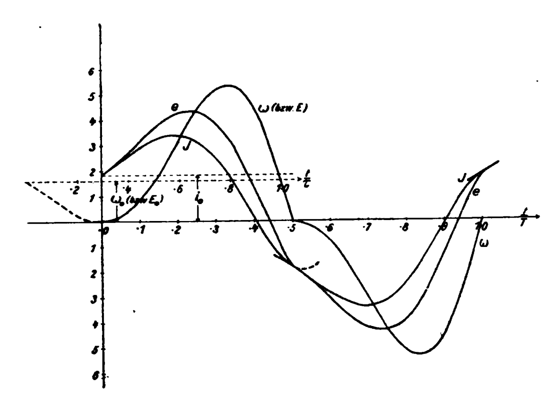


Fig. 45.

auf S. 125 betont, die Unzulässigkeit der Voraussetzung, daß A, w und L konstant seien; die Resultate der letzten Rechnung können daher nur angenähert richtig sein. Aus diesem Grunde habe ich die Mitteilung der etwas umständlichen Rechnung unterlassen und nur als Beispiel die Schwingungskurven für einen extremen Fall (nämlich für den Fall kleinstmöglicher Schwingungsamplitude) berechnet. Die erhaltenen Kurven zeigt Fig. 45, welche für unsere, auf S. 113 beschriebene Versuchsanordnung unter der Annahme, daß $W_1 = \infty$ sei, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{E}{a}$, Strom J und Ankerspannung $e = E + Jw_a$ als Funktionen der Zeit darstellt. Aus ihr ist zu sehen, wie jede Halbschwingung ein Stück einer stark anschwellenden Sinusschwingung ist, deren Nullinie ab-

wechselnd oberhalb und unterhalb der Abszissenachse liegt. Zur Verdeutlichung ist die erste Halbschwingung der ω-Kurve über die Abszisse $t=0$ hinaus nach rückwärts verlängert (gestricheltes Kurvenstück).

Bemerkenswert ist der Knick, den die ω- bezw. E-Kurve beim Durchgang durch die Abszissenachse erleiden. Daß dieser Knick auftreten muß, kann man direkt ableiten aus der Differentialgleichung

$$J = C\frac{dE}{dt} \pm i_0 + \frac{E}{W_1}, \tag{5a}$$

von der wir ausgingen. i_0 wechselt sein Vorzeichen, wenn E durch null geht; da J und E überall stetig verlaufen, folgt in der Tat, daß $\frac{dE}{dt}$ bei $E=0$ unstetig ist. Aus Gleichung (5a) kann man auch den Betrag berechnen, um den $\frac{dE}{dt}$ an dieser Stelle springt; man erhält

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{E=-0} - \left(\frac{dE}{dt}\right)_{E=+0} = \frac{2i_0}{C}.$$

Die Stromkurve verläuft dagegen überall glatt, wie es auch sein muß; denn schreibt man die andere der beiden Ausgangsgleichungen (Gl. (4)) in der Form

$$\frac{dJ}{dt} = -J\frac{w-A}{L} - \frac{E}{L},$$

so sieht man, daß $\frac{dJ}{dt}$ die Summe zweier stetiger Funktionen ist, also selbst stetig sein muß. Die ω-Kurve zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit der von Ottenstein experimentell aufgenommenen (Fig. 40), insofern als das Ansteigen der Drehgeschwindigkeit langsamer als das Abfallen erfolgt; auch der Knick bei $\omega=0$ scheint in Fig. 40 vorhanden zu sein (bei Arnold ist die Kurve allerdings so durch die gemessenen Punkte gelegt, daß sie auch im Nullpunkte glatt verläuft). Ich selbst habe von der experimentellen Aufnahme von Schwingungskurven abgesehen, da einerseits bei den hier erzielten ziemlich schnellen Schwingungen dazu eine umfangreiche Apparatur (Oszillograph) nötig gewesen wäre, andererseits aus den oben angeführten Gründen auf genauere Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie doch nicht zu rechnen ist.

Fassen wir zusammen, was die Besprechung der Pendelungen des von einem Hauptstromgenerator gespeisten, konstant erregten

Gleichstrommotors (§ 12 B, a—e) ergeben hat, so können wir sagen: Die Pendelungen lassen sich auf die bekannten elektrischen Schwingungen zurückführen und somit erklären, wenn man den Gleichstrommotor als Kondensator auffaßt. Allerdings werden durch diese Theorie die beobachteten Erscheinungen nur qualitativ erklärt; quantitative Übereinstimmung zwischen Versuchen und Theorie ist nicht zu erwarten wegen der vielen störenden Umstände, die in der Theorie nicht streng berücksichtigt werden können (nämlich magnetische Sättigung und Hysteresis des Eisens, Wirbelströme, Ankerrückwirkung, Reibung). Von diesen Störungen läßt sich nur ein Teil beseitigen, nämlich die Wirbelströme (durch Unterteilung des Eisens) und die Ankerrückwirkung (durch geeignete Abmessungen der Maschinen); der andere Teil dagegen läßt sich nicht vermeiden oder ist sogar nötig zum Zustandekommen der kontinuierlichen Pendelungen. Es ist daher auch mit verbesserten Versuchsbedingungen keine genügende Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch zu erwarten.

f) Die Möglichkeit eines stabilen Betriebes bei dem System: Hauptstromgenerator — fremd erregter Motor.

Bisher haben wir den von einem Hauptstromgenerator gespeisten „Kondensatormotor“ nur auf seine Fähigkeit hin untersucht, dauernde Schwingungen auszuführen. In der Technik haben aber diese Schwingungen keine weitere Bedeutung, als daß man sie zu vermeiden sucht; der Elektrotechniker fragt nicht: unter welchen Bedingungen treten Schwingungen auf? sondern: unter welchen Bedingungen treten **keine** Schwingungen auf?; wann arbeitet das System stabil? Diesen Standpunkt wollen auch wir jetzt einnehmen und fragen: Ist das System: Hauptstromgenerator — konstant erregter Motor zur Gleichstrom-Kraftübertragung verwendbar; ist überhaupt ein stabiler Betriebszustand ohne Pendelungen möglich und welches sind die Stabilitätsbedingungen?

Wir denken uns also den Motor mit irgendeiner Arbeitsmaschine belastet, deren mechanische Charakteristik durch eine Kurve m (ω) gegeben sei; in m sollen die im Motor auftretenden Verlustbremsmomente mit enthalten sein, so daß wir den Motor selbst als reibungslos annehmen können. Bei dieser Stabilitätsuntersuchung können wir die Überlegungen, die wir oben (§ 12,

B, a—e) über die vorliegende Anordnung anstellten, nicht verwenden, denn bisher hatten wir nur Pendelungen des Motors um die **Ruhelage** untersucht, d. h. das System in der Nähe des der Ruhelage entsprechenden Gleichgewichtszustandes betrachtet, während wir jetzt wissen wollen, ob es nicht stabile Gleichgewichtszustände gibt, bei denen dauernd Energie vom Generator zum Motor übertragen wird, bei denen also die Zustandsvariablen J, E, ω von null verschiedene Werte haben. Daß solche Gleichgewichtszustände möglich sind, erkennt man aus dem Charakteristikendiagramm (Fig. 46), in dem E_g (J) die äußere Charakteristik des Hauptstromgenerators darstellt; der Anker des „Kondensatormotors" sei als widerstandslos angenommen (diese Vernachlässigung beeinträchtigt nicht die Strenge unserer Überlegung, weil man den Ankerwiderstand des Kondensatormotors in der Charakteristik des Generators berücksichtigen kann). Dann muß bei Gleichgewicht E_g gleich der im Motor induzierten EMK. $E_m = a\omega$ sein. Die möglichen Gleichgewichtszustände erhält man daher, wenn man in das Diagramm die Kurve einzeichnet, welche die im Motor induzierte EMK. als Funktion des in ihm fließenden Stromes bei Gleichgewicht darstellt. Nach Früherem ist diese Kurve bis auf den Maßstab identisch mit der **mechanischen Charakteristik** m (ω) der von dem Motor angetriebenen Arbeitsmaschine (denn E ist proportional ω und bei Gleichgewicht ist $m = M =$ proportional J). Bringt man diese im geeigneten Maßstabe gezeichnete Charakteristik m (ω) zum Schnitt mit der Generatorcharakteristik E_g (J) (Fig. 46), so erhält man 3 Schnittpunkte: den Nullpunkt O und S_1 und S_2, also außer der der Ruhelage noch zwei andere mögliche Gleichgewichtszustände, die sich nur durch das Vorzeichen der Variablen E, J, ω unterscheiden. Da wir die Stabilität der Ruhelage im vorhergehenden behandelt haben, bleibt nur noch die Stabilität der Betriebszustände S_1 und S_2 zu untersuchen.

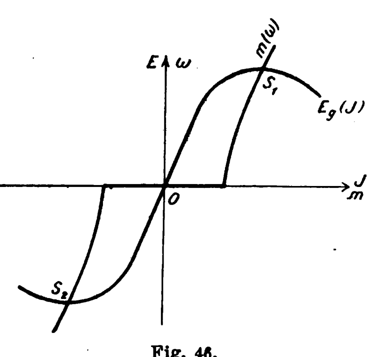


Fig. 46.

Dabei wollen wir wieder mit dem Trägheitsmoment Θ und

dem Bremsmomente $m(\omega)$ des Motors rechnen; diese beiden Größen durch die elektrischen Größen C und W, denen sie äquivalent sind, zu ersetzen, bringt hier keinen Vorteil. Da die Krümmung der Charakteristik des Hauptstromgenerators wesentlich ist für das Zustandekommen der jetzt betrachteten Schnittpunkte S_1 und S_2, dürfen wir die EMK. des Generators nicht mehr gleich $A\,J$ setzen, sondern müssen E_g aus der Charakteristik entnehmen, und zwar wollen wir deren Gleichung schreiben

$$E_g = H(J) - Jw.$$

Darin ist $H(J)$ die im Generator induzierte EMK.; Jw der Ohmsche Spannungsabfall; wir wollen wieder unter w den gesamten Widerstand des Stromkreises (Generator- + Motorwiderstand) verstehen, so daß wir den Motorwiderstand nicht weiter zu berücksichtigen brauchen. Dann gelten für das System folgende Differentialgleichungen:
die Gleichung der Spannungen

$$L\frac{dJ}{dt} + E_m = E_g(J) = H(J) - Jw \tag{25}$$

— darin ist $E_m = a\omega$ die im Motor induzierte EMK. — und die Gleichung der Drehmomente

$$\Theta\frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = M, \tag{26}$$

worin $M = aJ$ das vom Strom auf den Motoranker ausgeübte Drehmoment ist.

Die Untersuchung der Stabilität geschieht in bekannter Weise (§ 4), indem man zunächst die Gleichungen für den stationären Zustand $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ aufstellt; man erhält

$$E_{m_0} = E_g(J_0) \tag{25a}$$

und

$$m(\omega_0) = M_0 = aJ_0,$$

oder, da

$$\omega_0 = \frac{1}{a} E_{m_0}$$

ist:

$$m\left(\frac{E_{m_0}}{a}\right) = aJ_0. \tag{26a}$$

Die Gleichungen (25a) und (26a) sind der analytische Ausdruck für das graphische Verfahren, das wir oben zur Auffindung der Gleichgewichtspunkte S_1 und S_2 anwendeten: Gleichung (26a) sagt aus, daß bei Gleichgewicht die Motorspannung E_{m_0} mit dem Strom J_0 durch eine (statische) Charakteristik zusammenhängt, die bis auf den Maßstab mit der mechanischen Charakteristik $m(\omega)$ der Arbeitsmaschine übereinstimmt, während Gleichung (25a) sagt, daß man die Gleichgewichtspunkte findet, wenn man diese statische Motorcharakteristik mit der Generatorcharakteristik $E_g(J)$ zum Schnitt bringt.

Sodann ist das Verhalten des Systems in der Nähe eines solchen Gleichgewichtspunktes S_1 oder S_2 zu untersuchen; man erhält für kleine Abweichungen J_1, ω_1 der Variablen von ihren Gleichgewichtswerten J_0, ω_0 eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2}+\left(\frac{w-H'(J_0)}{L}+\frac{m'(\omega_0)}{\Theta}\right)\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{a^2+[w-H'(J_0)]\cdot m'(\omega_0)}{\Theta L}\omega_1 = 0. \tag{27}$$

Die Bedingung der Stabilität ist, wie früher, die, daß die Koeffizienten a_1 und a_2 von $\frac{d\omega_1}{dt}$ und ω_1 positiv sind; also lauten die Stabilitätsbedingungen:

$$a_1=\frac{w-H'(J_0)}{L}+\frac{m'(\omega_0)}{\Theta}>0 \tag{28}$$

und

$$a_2=\frac{a^2+[w-H'(J_0)]\cdot m'(\omega_0)}{\Theta L}>0. \tag{29}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Bedingung (29) in den praktisch vorkommenden Fällen — so lange nämlich die Charakteristik $m(\omega)$ abfällt, oder so schwach ansteigt, daß die Charakteristiken $E_g(J)$ (Generator) und $E_{m_0}(J)$ bezw. $m(\omega)$ (Verbraucher) sich so schneiden (Fig. 45), wie es das Kriterium A (§ 1) verlangt — stets erfüllt ist; es bleibt also als einzige Stabilitätsbedingung die Gleichung (28) zu erfüllen, welche verlangt, daß in dem betrachteten Gleichgewichtspunkte der Anstieg $H'(J_0)$ der inneren Generatorcharakteristik klein, der Anstieg $m'(\omega_0)$ der mechanischen Motorcharakteristik groß ist.

Für den häufig vorliegenden Fall, daß der Anstieg der mecha-

nischen Charakteristik der Arbeitsmaschine zu vernachlässigen ist, nimmt Bedingung (28) die einfache Form an

$$w - H'(J_0) > 0, \tag{28a}$$

oder, da $H(J) - Jw = E_g$ gleich der Klemmenspannung des Generators war:

$$E_g'(J_0) < 0. \tag{28b}$$

Wenn also das Bremsmoment der vom Motor angetriebenen Arbeitsmaschine konstant ist, so ist zur Stabilität notwendig, daß die äußere Charakteristik des Generators (in der auch der im Motor auftretende Ohmsche Spannungsabfall mitgerechnet ist) abfällt, d. h. in Fig. 46 sind nur Schnittpunkte S_1 bzw. S_2 rechts vom positiven bzw. links vom negativen Maximum der Charakteristik $E_g(J)$ stabil.

Im allgemeinen Fall (bei beliebiger Charakteristik $m(\omega)$) wird die Stabilität verschlechtert, wenn $m(\omega)$ abfällt (Ausnahmefall), und verbessert, wenn die mechanische Charakteristik ansteigt (wie es gewöhnlich zutrifft); in diesem Falle sind auch noch Gleichgewichtspunkte S_1, die ein wenig links vom positiven Maximum von E_g liegen, stabil.

Aus dem Stabilitätskriterium folgt, daß bei Leerlauf des Motors, d. h. bei kleinem Strome J_0, stets Labilität vorhanden ist, weil dann der Gleichgewichtspunkt S_1 sich immer weit links vom Maximum im Gebiete starken Anstiegs der Charakteristik E_g befindet; Stabilität ist nur möglich bei Belastung des Motors, am besten mit einer Arbeitsmaschine mit möglichst steil ansteigender Charakteristik.

In der Tat ließ sich mit der oben (S. 113) beschriebenen Versuchsanordnung, mit der wir die Pendelungen zeigen konnten, ein stabiler Betrieb erreichen, wenn man den Motor mit einer Arbeitsmaschine mit großem Anstieg m' der mechanischen Charakteristik genügend belastete (anstatt den Motor mechanisch durch Bremsung zu belasten, habe ich einen Widerstand $W =$ ca. 100 Ω parallel zu seinen Ankerklemmen geschaltet; nach den Erörterungen des § 11 A u. B kommt das auf dasselbe hinaus).

Daraus, daß Gleichung (29) praktisch stets erfüllt, also a_2 stets erheblich größer als null ist, folgt, daß die bei Nichterfüllung von Gleichung (28) auftretende Labilität sich stets in Form von Pendelungen äußern muß, deren Amplitude beständig anwächst.

Man könnte versucht sein, anzunehmen, daß unter Umständen auch Pendelungen konstanter Amplitude um den betrachteten Gleichgewichtszustand (J_0, ω_0) auftreten könnten, wenn nämlich die Dämpfungskonstante der Pendelungen

$$\delta = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{w - H'(J_0)}{L} + \frac{m'(\omega_0)}{\Theta}\right\} = 0$$

ist. Trotzdem lassen sich solche Schwingungen nicht herstellen und zwar aus demselben Grunde, aus dem sich kleine Schwingungen um die Nullage nicht dauernd aufrecht erhalten lassen, nämlich deshalb, weil der Schwingungszustand bei endlicher Schwingungsamplitude labil ist.

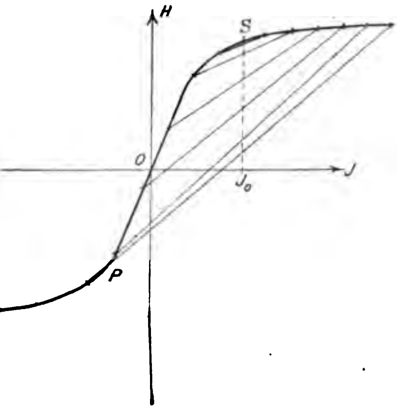


Fig. 47.

Das ergibt sich, wenn wir die in § 12 B, d angestellte Überlegung sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen. Dort hatten wir für die Stabilität stationärer Schwingungen die Bedingung gefunden: Es muß die Dämpfungskonstante δ von der Amplitude abhängen, und zwar muß sie mit zunehmender Amplitude zunehmen. Die Veränderlichkeit von δ mit der Amplitude kommt hier, ähnlich wie dort, dadurch zustande, daß $H'(J)$ wegen der Krümmung der inneren Charakteristik $H(J)$ nicht konstant ist, sondern im Laufe einer Periode variiert. Der Berechnung von δ können wir auch hier wieder einen gewissen Mittelwert $\overline{H'(J)}$ zugrunde legen; als solchen können wir in erster Annäherung den arithmetischen Mittelwert von $H'(J)$ auf dem in Betracht kommenden Stück der Charakteristik nehmen, und der ist gleich dem Anstieg der Sehne, welche die Endpunkte dieses Stückes verbindet.

In Fig. 47 ist die innere Charakteristik des Hauptstromgenerators durch die Kurve $H(J)$ dargestellt und einige solche Sehnen für Schwingungen verschiedener Amplitude um den Gleichgewichtszustand S gezeichnet; man sieht, daß ihr Anstieg infolge der Krümmung der Kurven $H = H(J)$ mit zunehmender Amplitude

wächst; damit wächst auch $\overline{H'(J)}$, die Dämpfungskonstante δ nimmt also mit zunehmender Amplitude ab, d. h. der Zustand stationärer Schwingungen ist labil. Wenn also auch wirklich einmal $\delta = 0$ ist, d. h. stationäre Schwingungen realisiert sind, so bewirkt die geringste Störung entweder dauernde Verringerung der Amplitude bis zur Erreichung des Gleichgewichtes, oder dauerndes Anwachsen. Dieses Anwachsen dauert so lange, bis das untere Knie P (Fig. 47) der $H(J)$-Kurve überschritten ist. Dann enthält das Intervall der Charakteristik, innerhalb dessen sich die Schwingung abspielt, auch die Gleichgewichtslage $J = 0$, und nun müssen die Schwingungen um diese Gleichgewichtslage stattfinden, weil dann bei gleicher Amplitude der Mittelwert $\overline{H'(J)}$ größer ist als bei Schwingungen um die ursprüngliche Gleichgewichtslage $J = J_0$.

Daher sind hier dauernde Schwingungen, in Übereinstimmung mit dem Versuch, nur um die Ruhelage des Motorankers möglich.

In dem Falle, daß der Motor sich mit konstanter Drehgeschwindigkeit, also stabil, dreht, zeigt er ein eigentümliches Verhalten größeren Gleichgewichtsstörungen gegenüber, das wir an Hand des Charakteristikendiagramms voraussagen können: der Motor sei belastet mit einer Arbeitsmaschine, die unabhängig von der Drehrichtung, in der sie angetrieben wird, Energie verbraucht; ihre mechanische Charakteristik liege also nur im I. und III. Quadranten und habe in beiden den gleichen Verlauf. Denselben Verlauf muß dann, wie wir oben bemerkten, die statische elektrische Motorcharakteristik haben. Diese Charakteristik sei durch die Kurve E_{m_0} in Fig. 48 dargestellt, E_g sei die Generatorcharakteristik. Die Charakteristik E_{m_0} steige an und sei im übrigen so beschaffen, daß die Schnittpunkte S_1 (im I. Quadranten) und S_2 (im III. Quadranten) beide stabil seien; der dritte Schnittpunkt O (der Nullpunkt) ist labil. Wir nehmen an, das System sei im Punkte S_1 im Gleichgewichte und nun finde von außen her eine Störung statt. Um die Wirkung dieser Störung zu erkennen. wollen wir im Diagramm Fig. 48 die Bewegung desjenigen Punktes P verfolgen, dessen Ordinate die EMK. des Motors E_m (die proportional der Drehgeschwindigkeit ω ist) und dessen Abszisse der Strom ist. Für die Bewegung dieses Punktes folgt aus Gl. (25): wenn E_m kleiner als das dem vorhandenen Strome J entsprechende E_g ist, so ist $\frac{dJ}{dt}$ positiv und umgekehrt, d. h. wenn der Punkt P

unterhalb der Generatorcharakteristik liegt, muß er sich nach rechts bewegen, liegt er oberhalb, so muß er sich nach links bewegen. Schreiben wir ferner Gleichung (26), indem wir für ω den Wert $\frac{1}{a} E_m$ einsetzen, in der Form

$$\frac{1}{a}\,\Theta\frac{d E_m}{dt} = aJ - m\left(\frac{E_m}{a}\right), \tag{26b}$$

so folgt: ist aJ größer als $m\left(\frac{E_m}{a}\right)$, oder ist J größer als der E_m durch die statische elektrische Motorcharakteristik (Gl. 26a) zu-

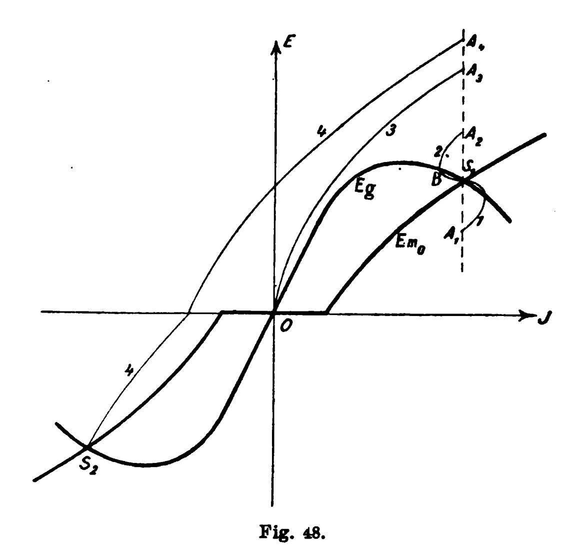


Fig. 48.

geordnete Wert J_0, so ist $\frac{d E_m}{dt}$ positiv und umgekehrt, d. h. wenn der Punkt P rechts von der statischen Motorcharakteristik E_{m_0} liegt, muß er sich nach oben bewegen, liegt er links von ihr, so muß er nach unten wandern.

Wir nehmen nun an, die Störung erfolge derart, daß die Drehgeschwindigkeit ω gewaltsam verändert wird; die Dauer der Störung, d. h. die Zeit, innerhalb deren die Veränderung von ω erfolgt, sei so kurz, daß der Strom sich während dieser Zeit nicht merklich ändere. Zunächst werde ω verkleinert, z. B. durch kurz dauerndes starkes Bremsen. Dadurch rückt der Punkt P, der vorher mit dem Gleichgewichtspunkte S_1 zusammenfiel, nach unten,

sagen wir nach A_1. Wird nun das System sich selbst überlassen, so beginnt Punkt P von A_1 aus, entsprechend den oben abgeleiteten Regeln, nach rechts oben zu wandern (Kurve 1, Fig. 48). Sobald er die Charakteristik E_g überschritten hat, wandert er nach links oben weiter, und erreicht nun entweder aperiodisch, oder periodisch (indem er um S_1 eine Spirale in einer der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung beschreibt), je nach der Dämpfung der möglichen Schwingung, den Gleichgewichtspunkt S_1. Wir nehmen an, der erstere Fall der aperiodischen Dämpfung liege vor. Dann sieht man, daß durch keine noch so große Verringerung von ω, auch nicht durch Umkehr der Drehrichtung (negatives ω) das Gleichgewicht dauernd gestört werden kann; es stellt sich immer wieder der Zustand S_1 ein.

Wird dagegen vom Gleichgewichtszustande S_1 aus ω plötzlich vergrößert, so wird bei kleiner Störung, wie sie etwa einer anfänglichen Verrückung des Punktes P bis in die Lage A_2 entspricht, der Vorgang sich ähnlich abspielen wie vorhin: P wird von A_2 aus auf einer Kurve 2 zunächst nach links unten wandern, bis zum Schnittpunkte B mit der Charakteristik E_g; von da ab wandert er nach rechts unten, bis er den Gleichgewichtspunkt S_1 wieder erreicht hat. Ist aber die anfängliche Störung so groß (Anfangslage von P in A_3, Kurve 3), daß B mit O zusammenfällt, so wird dort (labiles) Gleichgewicht erreicht, und ist die Störung noch ein wenig größer (Punkt A_4, Kurve 4), so geht das System in den dem anderen stabilen Gleichgewichtspunkte S_2 entsprechenden Zustand über, d. h. der Motor kehrt seine Drehrichtung um.

Wollen wir also vom Zustande S_1 zu S_2 übergehen, so können wir das nicht durch Bremsung oder gewaltsame Änderung der Umdrehungsrichtung erreichen, sondern gewissermaßen nur mit List, indem wir dem System einen Antrieb entgegengesetzt dem beabsichtigten Sinne erteilen; der Motor verhält sich wie ein störrisches Tier, das immer das Gegenteil von dem tut, was es soll.

Diese Überlegungen wurden durch den Versuch vollkommen bestätigt gefunden. Bei der oben (S. 138) beschriebenen Versuchsanordnung ließ sich der Motor weder durch Bremsung noch durch Antreiben in umgekehrter Richtung aus dem Gleichgewicht bringen; sobald er aber beschleunigt wurde, kehrte er seine Drehrichtung um.

g) Kritik früherer Erklärungsversuche für das Pendeln des Systems: Hauptstromgenerator — konstant erregter Motor.

Einen Erklärungsversuch für die hier behandelten Pendelungserscheinungen habe ich in der Literatur nur in dem Arnoldschen Werke [1]) gefunden.

Arnold geht von der Gleichung der Spannungen beim stationären Zustande (unserer Gleichung (25a)) aus, die er, indem er den Motorwiderstand w_m besonders berücksichtigt, schreibt:

$$E_g = E_m + J w_m, \tag{25b}$$

und untersucht nun, wie sich das System nach dem Einschalten des vorher ruhend gedachten Motors verhält, an Hand eines Diagramms, das im wesentlichen auf unsere Fig. 46 hinauskommt; nur trennt er, ebenso wie in Gleichung (25b), die Glieder E_g und $J w_m$ und zeichnet dementsprechend in dem Diagramm Fig. 49 die wirkliche Generatorcharakteristik E_g (J) und außerdem eine Gerade $E = J w_m$; nach Gleichung (25b) muß dann die Motorspannung E_m gleich der Differenz der Ordinaten beider Kurven sein. Arnold schließt nun:

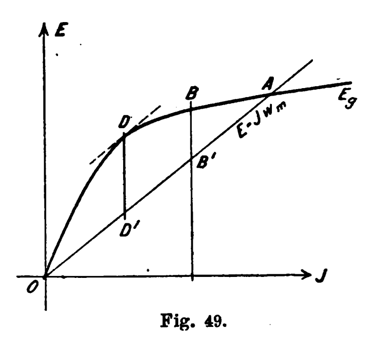


Fig. 49.

Im Momente des Anlaufens ist $E_m = 0$, also $E_g = J w_m$, entsprechend dem Punkte A des Diagramms. Bei der Zunahme der Geschwindigkeit wächst E_m, so daß der Strom abnimmt und der Betriebszustand sich vom Punkte A aus auf der Charakteristik nach links bewegt (Punkt B). Die Länge BB' muß dabei gleich E_m sein. Diese Strecke erreicht ihr Maximum im Punkte D und nun heißt es weiter: „Ist während der Anlaufperiode im Punkte D noch kein Gleichgewichtszustand erreicht, also noch ein überwiegendes Drehmoment [auf den Motor] vorhanden, so müßte der ansteigenden Geschwindigkeit entsprechend auch E_m größer werden, was jedoch nicht mehr möglich ist, da DD' gleich dem . . . [hier möglichen] . . . Maximalwerte von E_m ist . . . . Über den Punkt D . . . hinaus kann sich demnach kein Gleichgewichtszustand mehr einstellen und es tritt Pendeln ein“.

Diese Überlegung kann aber nicht als Erklärung des Pendelns bezeichnet werden; es ist von vornherein unmöglich, auf dem von Arnold eingeschlagenen Wege das Auftreten periodischer Bewegung des Systems verständlich zu machen; denn, wie wir oben sahen, ist für das Auftreten der Pendelungen die Selbstinduktion des Systems wesentlich, und die wird bei A. vollständig vernachlässigt.

Vielmehr zeigt die A.sche Überlegung nur, daß hier ein möglicher Gleichgewichtszustand unter Umständen nicht von selbst erreicht wird, d. h. mit anderen Worten, daß ein Gleichgewichtszustand labil sein kann; jene Überlegung ist also ebenfalls eine versteckte Stabilitätsbetrachtung, die aber, wegen

1) E. Arnold, Die Gleichstrommaschine, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1906, S. 622.

der Vernachlässigung der Selbstinduktion, nicht streng ist. Das Stabilitätskriterium, das Arnold findet, lautet: Der dem Gleichgewicht entsprechende Punkt der Generatorcharakteristik muß rechts von D liegen, oder, in unserer Ausdrucksweise:

Es muß der Anstieg der Charakteristik E_g schwächer sein als der der Widerstandslinie Jw_m, d. h. es muß

$$E_g' - w_m < 0$$

sein. Beachtet man die von der unseren abweichende Bezeichnungsweise, so sieht man, daß dieses Kriterium identisch ist mit dem von uns gefundenen, in vielen Fällen annähernd gültigen Kriterium (28b); daraus folgt, daß die Arnoldsche Überlegung, bei der die Selbstinduktion vernachlässigt wird, bei der Aufstellung des Stabilitätskriteriums in erster Annäherung zulässig ist, wenn sie auch das Auftieten der Pendelungen nicht zu erklären vermag.

Kapitel IV.

Anwendungen auf praktische Fälle.

§ 13. Pendelungen der Gleichstrommotoren, insbesondere des Hauptstrommotors, bei Antrieb durch einen Hauptschlußgenerator.

(Reihenschluß-Kraftübertragung.)

Die Kraftübertragungsanordnung, die wir im vorigen Paragraphen behandelten — nämlich ein konstant erregter Gleichstrommotor, der von einem Hauptstromgenerator gespeist wird —, läßt sich im praktischen Betriebe, eben wegen der auftretenden Pendelungen, nicht verwenden; es liegt aber auch kein Bedürfnis dazu vor, vielmehr werden in der Praxis fast ausschließlich Nebenschluß- oder Hauptschlußmotore gebraucht. Aber auch bei solchen Motoren können, falls als Generator eine Hauptstrommaschine verwendet wird, ganz ähnliche Pendelungserscheinungen auftreten, namentlich bei Nebenschlußmotoren; denn bei diesen ist die Selbstinduktion und damit die Zeitkonstante der Nebenschlußwicklung so groß, daß man für die Stabilitätsuntersuchung den Strom im Nebenschluß, also das Magnetfeld, als annähernd konstant ansehen kann. In bezug auf die Stabilität muß sich daher der Nebenschlußmotor ganz ähnlich verhalten wie der konstant erregte Motor des vorigen Paragraphen; er wird vor allem instabil sein und pendeln, wenn er von einem Generator mit genügend steil ansteigender Charakteristik, z. B. einem Hauptstromgenerator, gespeist wird. Deshalb ist der Antrieb eines Gleichstrom-

nebenschlußmotors von einem Hauptstromgenerator aus nicht angängig, wenngleich sich natürlich, ebenso wie beim konstant erregten Motor (§ 12, B f), Ausnahmefälle angeben lassen, in denen auch ein solcher Antrieb stabil arbeiten kann, z. B. bei sehr starker Eisensättigung und großem inneren Widerstande des Generators.

Was die Art der hier auftretenden Pendelungen anbetrifft, so besteht zwischen dem hier vorliegenden Falle und dem des vorigen Paragraphen ein in die Augen fallender Unterschied. Hier ist bei Gleichgewicht die Drehrichtung des Motors unabhängig vom Vorzeichen der angelegten Spannung; es gibt daher nur einen Gleichgewichtswert der Drehgeschwindigkeiten, und um diesen, von null verschiedenen Geschwindigkeitswert müssen die Pendelungen stattfinden. Der Versuch bestätigt das, im allgemeinen kehrt hier die Drehrichtung überhaupt nicht ihr Vorzeichen um, sondern die Geschwindigkeit pendelt zwischen einem größeren und einem kleineren Werte hin und her.

Ähnlich, wenn auch nicht ganz so ungünstig, liegen die Verhältnisse, wenn der Nebenschlußmotor durch einen Compoundgenerator angetrieben wird, sofern letzterer eine ansteigende Charakteristik hat (wie es bei geringer Belastung meistens der Fall ist). Wir wollen uns bezüglich dieses Falles auf die Bemerkung beschränken, daß auch hier Labilität und Pendelungen möglich sind und auch im praktischen Betriebe beobachtet wurden; man vermeidet deshalb nach Möglichkeit solche Antriebe.

Von der genauen Ausrechnung und Diskussion der Stabilitätsbedingungen in den beiden letzten Fällen wollen wir in Anbetracht der geringen praktischen Bedeutung der Anordnungen absehen; die Durchrechnung würde, da sie auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung führt, erhebliche Mühe machen und doch zu keinem praktisch brauchbaren Resultat führen, da die Stabilitätsbedingungen viel zu kompliziert werden würden.

Von praktischer Wichtigkeit ist dagegen der Fall, daß ein Hauptschlußmotor von einem Hauptschlußgenerator gespeist wird. Solche Anordnungen werden wegen ihrer Einfachheit vielfach zur Kraftübertragung auf mittlere Entfernungen benutzt (Kraftübertragung mit variabler Spannung und variablem Strom), und auch hier hat man störende Pendelungen beobachtet. Wir können aber diese Pendelungen nicht ohne weiteres auf die im vorigen Paragraphen untersuchten Schwin-

gungen zurückführen, weil hier das Magnetfeld des Motors nicht konstant ist und auch nicht annähernd als konstant betrachtet werden kann; vielmehr ist es in jedem Moment eindeutig durch den Ankerstrom des Motors bestimmt. Um die Bedingungen, unter denen die Pendelungen auftreten können, und die Mittel, sie zu vermeiden, zu finden, ist vielmehr eine besondere Stabilitätsuntersuchung notwendig, die nach den in § 4 gegebenen Regeln auszuführen ist. Zu dieser

Untersuchung der Stabilität eines durch einen Hauptstromgenerator gespeisten Hauptstrommotors

wollen wir uns jetzt wenden.

Das betrachtete System ist schematisch durch Fig. 50 dargestellt. Da das Magnetfeld des Motors nicht mehr konstant ist, sondern vom Hauptstrom J abhängt, ist die Konstante a in den früheren Gleichungen jetzt zu ersetzen durch eine Stromfunktion $h(J)$, so daß die im Motoranker induzierte EMK.

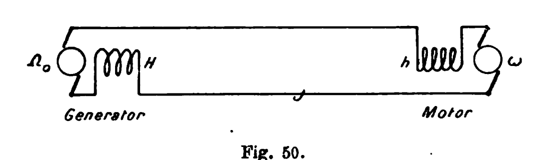


Fig. 50.

$$E_i = \omega \cdot h(J) \tag{1}$$

und das von ihm ausgeübte Drehmoment

$$M = J \cdot h(J) \tag{2}$$

ist. Im übrigen wollen wir die Ableitung etwas allgemeiner gestalten als im vorigen Paragraphen, nämlich annehmen: erstens, der Motor sei belastet mit einer Arbeitsmaschine mit der Charakteristik $m(\omega)$ [in der auch, wie in § 9 (S. 81), die Reibungsverluste des Motors enthalten sein sollen] und zweitens, die vom Generator erzeugte EMK. sei nicht proportional dem entnommenen Strom J, sondern eine beliebige, gegebene Funktion desselben, die wir in Analogie zum Ausdruck für die EMK. $\omega h(J)$ des Motors schreiben: $\Omega_0 H(J)$; Ω_0 ist dann die konstante Drehgeschwindigkeit des Generators, während $H(J)$ das Magnetfeld des Generators in gleichem Maßstabe angibt wie $h(J)$ das des Motors. Ist W der gesamte Widerstand, L die gesamte Selbstinduktion des elektrischen Kreises und Θ das Trägheitsmoment des Motors einschließlich desjenigen der Arbeitsmaschine, so gelten für das System folgende Gleichungen:

$$WJ + L\frac{dJ}{dt} + \omega h(J) = \Omega_0 H(J); \qquad (3)$$

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = J \cdot h(J). \qquad (4)$$

Zunächst sind daraus die Gleichungen für den Gleichgewichtszustand $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ abzuleiten; geben wir, wie früher, den Gleichgewichtswerten der Variablen J und ω den Index null, so erhalten wir für sie:

$$WJ_0 + \omega_0 h(J_0) = \Omega_0 H(J_0), \qquad (5)$$

$$m(\omega_0) = J_0 h(J_0). \qquad (6)$$

Die erste dieser Gleichungen wollen wir dadurch etwas umformen, daß wir den Gesamtwiderstand W zerlegen in den Generatorwiderstand W_1 und den Motorwiderstand W_2; dabei ist der Leitungswiderstand entweder zum Motor- oder zum Generatorwiderstande hinzuzunehmen. Dann schreibt sich Gl. (5):

$$W_2 J_0 + \omega_0 h(J_0) = \Omega_0 H(J_0) - W_1 J_0. \qquad (5a)$$

Jetzt steht links die Klemmenspannung des Motors $e_0 = e(J_0)$, rechts die des Generators $E_0 = E(J_0)$; Gl. (5a) enthält die selbstverständliche Bedingung des Gleichgewichtszustandes, daß beide Klemmenspannungen einander gleich sein müssen. Man erkennt nun eine sehr wichtige Eigenschaft des betrachteten Kraftübertragungssystems: richtet man es so ein, daß bei konstant gehaltenem ω_0 Gleichung (5a) für alle J_0 identisch erfüllt ist, d. h. daß bei konstantem ω_0 die äußere Charakteristik $e(J)$ des Motors mit der des Generators $E(J)$ zusammenfällt, so muß umgekehrt für alle Stromwerte, d. h. für alle Belastungen, die Drehgeschwindigkeit ω_0 des Motors dieselbe sein, seine Drehzahl wird unabhängig von der Belastung. Allerdings läßt sich jene Bedingung:

$$[e(J)]_{\omega_0 = \mathrm{const}} = E(J) \qquad (5b)$$

in der Praxis nur unvollkommen erfüllen.

Wir nehmen weiter an, das Gleichgewicht sei ein wenig gestört und setzen dementsprechend:

$$J = J_0 + J_1; \quad \omega = \omega_0 + \omega_1.$$

Einsetzung in Gleichung (3) und (4) ergibt mit Rücksicht auf (5) und (6), wenn man die Quadrate der kleinen Größen J_1 und ω_1, sowie ihr Produkt vernachlässigt:

$$J_1 W + L \frac{dJ_1}{dt} + \omega_0 J_1 h'(J_0) + \omega_1 h(J_0) = \Omega_0 J_1 H'(J_0), \tag{7}$$

$$\Theta \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1 m'(\omega_0) = J_1 h(J_0) + J_0 J_1 h'(J_0), \tag{8}$$

woraus man durch Elimination von ω_1 erhält:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_1}{dt^2} &+ \left\{\frac{m'}{\Theta} + \frac{\omega_0 h' + W - \Omega_0 H'}{L}\right\} \frac{dJ_1}{dt} \\ &+ \frac{h^2 + J_0 h h' + m'(\omega_0 h' + W - \Omega_0 H')}{\Theta L} \cdot J_1 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

als Differentialgleichung für den Ausgleich einer kleinen Störung J_1 (bzw. ω_1, denn für ω_1 gilt ja dieselbe Differentialgleichung).

Wir schreiben Gl. (9) zur Abkürzung:

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + a_1 \frac{dJ_1}{dt} + a_2 J_1 = 0. \tag{9a}$$

Die Ausdrücke für die Koeffizienten a_1 und a_2 lassen sich vereinfachen, wenn man W wieder in die Einzelwiderstände W_1 und W_2 zerlegt; denn nach Gleichung (5a) ist:

$$\omega_0 h'(J_0) + W_2 = \left(\frac{\partial e}{\partial J}\right)_{J=J_0} = e'(J_0)\ ^{1)},$$

$$W_1 - \Omega_0 H'(J_0) = -\left(\frac{dE}{dJ}\right)_{J=J_0} = -E'(J_0),$$

1) Da e nicht nur von J, sondern auch von ω abhängt, ist hier die partielle Ableitung $\frac{\partial e}{\partial J}$ zu nehmen; es sei aber hier ausnahmsweise erlaubt, dafür e' zu schreiben. Man muß sich dann nur hüten, dieses e' zu verwechseln mit der totalen Ableitung $\frac{de}{dJ_0}$, welche das Verhältnis der wirklich eintretenden Spannungsänderung am Motor zur Stromänderung angibt unter Berücksichtigung der gleichzeitig stattfindenden Änderung von ω. Natürlich hat diese totale Ableitung $\frac{de}{dJ_0} = \frac{\partial e}{\partial J_0} + \frac{\partial e}{\partial \omega_0} \cdot \frac{d\omega_0}{dJ_0}$ einen Sinn nur dann, wenn man sich auf die Betrachtung von Gleichgewichtszuständen beschränkt, weil sonst keine eindeutige Beziehung zwischen ω und J besteht; $\frac{de}{dJ_0}$ bedeutet den Anstieg der statischen elektrischen Charakteristik des mit der betrachteten Arbeitsmaschine belasteten Hauptstrommotors, während $\frac{\partial e}{\partial J} = e'$ den Anstieg der elektrischen Charakteristik des mit konstanter Umdrehungszahl betriebenen Hauptstrommotors angibt.

also können wir schreiben:

$$a_1 = \frac{m'}{\Theta} + \frac{e' - E'}{L} \tag{10}$$

und

$$a_2 = \frac{h(h + J_0 h') + m'(e' - E')}{\Theta L}. \tag{11}$$

Wie früher (§ 3 und 4) gezeigt und schon mehrfach benutzt, ist notwendig und hinreichend zur Stabilität, daß a_1 und a_2 positiv sind; demnach lauten die Stabilitätsbedingungen:

$$\frac{m'}{\Theta} + \frac{e' - E'}{L} > 0, \tag{12}$$

und, da Θ und L stets positiv sind:

$$m'(e' - E') + h(h + J_0 h') > 0. \tag{13}$$

Diskussion der Stabilitätsbedingungen:

Wir fangen mit der zweiten Gleichung (13) an.

Wie früher (§ 5, S. 44) gezeigt, äußert sich bei Nichterfüllung von Gl. (13) (d. h. bei negativem a_2) die Labilität nicht in Pendelungen, sondern wir haben einfache Labilität, d. h. das System entfernt sich mit wachsender Zeit immer mehr vom Gleichgewichtszustande. Um die physikalische Bedeutung der Gleichung (13) zu erkennen, wollen wir die statische mechanische Charakteristik $M_0(\omega_0)$ des Motors unter den vorliegenden Verhältnissen (d. h. bei Antrieb durch den Hauptstromgenerator) betrachten: wir werden nämlich sehen, daß die Bedingung (13) in naher Beziehung zu unserem früheren einfachen mechanischen Stabilitätskriterium B (§ 8) steht.

Wir müssen dazu das beim Gleichgewichtszustande vom Motor ausgeübte Drehmoment M_0 als Funktion der Drehzahl ω_0 berechnen. Durch Gleichung (2) ist M_0 zunächst als Funktion des Stromes J (hier J_0) gegeben:

$$M_0 = J_0 h(J_0); \tag{2a}$$

wir müssen also noch den Zusammenhang zwischen J_0 und ω_0 kennen, und der ist gegeben durch Gleichung (5):

$$W J_0 + \omega_0 h(J_0) = \Omega_0 H(J_0). \tag{5}$$

Aus den beiden Gleichungen (2a) und (5) erhält man durch Elimination von J_0 (die graphisch ausgeführt werden kann) M_0 als Funktion von ω_0, also die gesuchte statische Charakteristik.

Den Anstieg dieser Charakteristik, der uns hier hauptsächlich interessiert, kann man analytisch berechnen; er ist gleich:

$$M'_0(\omega_0) = \frac{dM_0}{d\omega_0} = \frac{dM_0}{dJ_0} \cdot \frac{dJ_0}{d\omega_0}.$$

Setzen wir darin ein aus Gleichung (2a):

$$\frac{dM_0}{dJ_0} = J_0 h' + h$$

und aus Gleichung (5):

$$W \frac{dJ_0}{d\omega_0} + \omega_0 h' \cdot \frac{dJ_0}{d\omega_0} + h = \Omega_0 H' \cdot \frac{dJ_0}{d\omega_0},$$

also

$$\frac{dJ_0}{d\omega_0} = \frac{h}{\Omega_0 H' - W - \omega_0 h'} = \frac{h}{E' - e'},$$

so erhalten wir:

$$M'_0(\omega_0) = \frac{h(h + J_0 h')}{E' - e'} = -\frac{h(h + J_0 h')}{e' - E'}. \tag{14}$$

Dividieren wir andererseits Gleichung (13) durch $e' - E'$ bzw. $E' - e'$, so lautet sie:

$$m' + \frac{h(h + J_0 h')}{e' - E'} > 0, \text{ falls } e' - E' > 0$$

bzw.

$$m' + \frac{h(h + J_0 h')}{e' - E'} < 0, \text{ falls } e' - E' < 0.$$

Unter Benutzung von Gleichung (14) läßt sich demnach Gleichung (13) schreiben:

$$m' - M'_0 > 0, \text{ falls } M'_0 < 0 \tag{13a}$$

bzw.

$$m' - M_0' < 0, \text{ falls } M'_0 > 0, \tag{13b}$$

denn nach Gl. (14) hat M'_0 immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie $(e' - E')$, da h und J_0 stets gleiches Vorzeichen haben und h' stets positiv ist (denn h ist ja bis auf einen konstanten Faktor gleich dem magnetischen Induktionsflusse im Motor). Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem einfachen mechanischen Stabilitätskriterium

$$m' - M' > 0, \qquad \text{(Kriterium } B, \text{ § 8)}$$

so können wir die Bedeutung der Gleichungen (13a) und (13b) und damit der Stabilitätsbedingung (13) folgendermaßen aussprechen:

Gleichung (13) verlangt, falls die mechanische statische Charakteristik des Motors abfällt ($M'_0 < 0$), die Erfüllung des mechanischen Stabilitätskriteriums; steigt dagegen die Motorcharakteristik an ($M'_0 > 0$), so fordert Gleichung (13), daß dieses Kriterium nicht erfüllt ist.

Nun werden in der Praxis derartige Kraftübertragungsanlagen stets so ausgeführt, daß die Umdrehungszahl des Motors möglichst unabhängig von der Belastung ist, d. h. daß seine mechanische Charakteristik nahezu senkrecht verläuft. Wenn also M'_0 negativ ist, so wird M_0 etwa den in Fig. 51a dargestellten Verlauf haben; Gleichung (13) verlangt dann, daß die Charakteristik m der Arbeitsmaschine in der Nähe des Betriebspunktes S

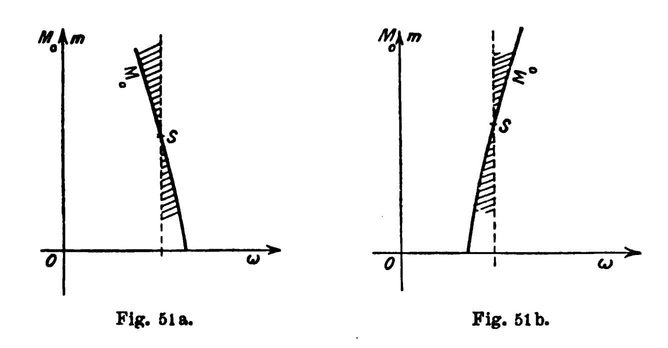


Fig. 51a. Fig. 51b.

nicht in dem schraffierten Winkelraum verläuft, während bei ansteigender Charakteristik M_0 die Charakteristik m nicht in dem in Fig. 51b schraffierten Winkel liegen darf.

Die durch Fig. 51a ausgeschlossenen Neigungen der Arbeitsmaschinencharakteristik sind so unwahrscheinlich, daß wir sagen können: falls die Charakteristik M_0 abfällt, d. h. wenn $e' - E' > 0$ ist, ist die Stabilitätsbedingung (13) stets erfüllt. Dagegen kann sehr wohl die Charakteristik m so steil ansteigen, daß nach Fig. 51b Labilität eintritt, nämlich dann, wenn die Arbeitsmaschine ein Gleichstrom-Nebenschlußgenerator ist, der eine Akkumulatorenbatterie auflädt (vgl. Fig. 25, § 9). In diesem Falle ist bei positivem M'_0 der Zustand nur stabil, wenn M'_0 genügend groß, also nach Gleichung (14) $E' - e'$ genügend klein ist. Das dürfte aber der einzige Fall sein, in dem die Erfüllung von Gl. (13) zweifelhaft sein könnte; im allgemeinen wird die Gleichung ohne weiteres erfüllt sein.

Gleichung (13) läßt sich auch noch ganz anders, nämlich rein elektrisch deuten. Um das zu erkennen, bilden wir den Ausdruck für den Anstieg der statischen elektrischen Charakteristik des mit der betrachteten Arbeitsmaschine belasteten Motors. Wie in der Anmerkung von S. 148 bemerkt, ist dieser Anstieg gleich der totalen Ableitung:

$$\frac{de}{dJ_0} = \frac{\partial e}{\partial J_0} + \frac{\partial e}{\partial \omega_0} \cdot \frac{d\omega_0}{dJ_0}.$$

Darin ist

$$\frac{\partial e}{\partial J_0} = e'(J_0)$$

(S. 148); aus

$$e = W_2 J_0 + \omega_0 h(J_0)$$

(Gl. 5a) findet man:

$$\frac{\partial e}{\partial \omega_0} = h.$$

$\frac{d\omega_0}{dJ_0}$ endlich erhält man durch Differentiation von Gl. (6):

$$m' \cdot \frac{d\omega_0}{dJ_0} = J_0 h' + h.$$

Also wird

$$\frac{de}{dJ_0} = e' + \frac{h(J_0 h' + h)}{m'}. \tag{14a}$$

Andererseits läßt sich Gl. (13) schreiben:

$$e' - E' + \frac{h(J_0 h' + h)}{m'} > 0, \text{ falls } m' > 0$$

bzw.

$$e' - E' + \frac{h(J_0 h' + h)}{m'} < 0, \text{ falls } m' < 0;$$

also mit Benutzung von Gl. (14a):

$$\frac{de}{dJ_0} - E' > 0, \text{ falls } m' > 0; \tag{13c}$$

bzw.

$$\frac{de}{dJ_0} - E' < 0, \text{ falls } m' < 0. \tag{13d}$$

In Worten:

Falls die mechanische Charakteristik $m(\omega)$ der vom Motor angetriebenen Maschine ansteigt, muß in bezug auf die statischen

elektrischen Charakteristiken von Generator und Motor das einfache elektrische Stabilitätskriterium (Kriterium A) erfüllt sein; fällt dagegen jene mechanische Charakteristik ab, so darf das Kriterium A gerade nicht erfüllt sein.

Da es nach dem oben Gesagten praktisch ausgeschlossen ist, daß bei abfallender Charakteristik $m(\omega)$ Bedingung (13) nicht erfüllt ist (vgl. Fig. 51a), können wir auch sagen: Bedingung (13) verlangt, daß entweder m' negativ ist, oder die statischen elektrischen Charakteristiken von Generator und Motor dem Kriterium A genügen.

Diese Auslegung von Gleichung (13) setzt uns in den Stand, durch rein elektrische Messungen, nämlich Aufnahme der statischen Charakteristiken am Generator und am Motor im voraus festzustellen, ob die Stabilitätsbedingung erfüllt ist.

Wenden wir uns nun zu der anderen Stabilitätsbedingung [Gleichung (12)]. Sie lautet:

$$\frac{m'}{\Theta} + \frac{e'-E'}{L} > 0. \tag{12}$$

Wie früher gezeigt, treten bei Nichterfüllung dieser Gleichung (bei negativem a_1) und Erfüllung von Gleichung (13) (bei positivem a_2) Pendelungen von ständig wachsender Amplitude auf, und solche sind tatsächlich bisweilen beobachtet worden, im Gegensatz zu der Labilität erster Art, wie sie bei Nichterfüllung von Gl. (13) zu erwarten steht, die kaum beobachtet wurde. Die Stabilität hängt demnach im wesentlichen nur von der Erfüllung der Gleichung (12) ab.

Gleichung (12) läßt eine anschauliche geometrische Interpretation zu, die an Überlegungen, wie wir sie in § 10 anstellten, erinnert. Dazu ist die Gleichung noch etwas umzuformen: wir dividieren sie durch die halbe, bei Gleichgewicht übertragene Leistung, für die, unter Vernachlässigung der Energieverluste im Motor, gilt:

$$\tfrac{1}{2} E J_0 = \tfrac{1}{2} e J_0 = \tfrac{1}{2} m \omega_0 ,$$

und erhalten:

$$\frac{m'}{\tfrac{1}{2} m \omega_0 \Theta} + \frac{e'-E'}{\tfrac{1}{2} e J_0 L} = \frac{m'}{\left(\frac{m}{\omega_0}\right) \tfrac{1}{2} \Theta \omega_0^2} + \frac{e'-E'}{\left(\frac{e}{J_0}\right) \tfrac{1}{2} L J_0^2} > 0 ,$$

oder, wenn wir noch mit $\tfrac{1}{2} L J_0^2$ multiplizieren:

$$\frac{1}{v}\,\frac{m'}{\left(\frac{m}{\omega_0}\right)}+\frac{e'-E'}{\left(\frac{e}{J_0}\right)}>0, \tag{12a}$$

worin v, wie in § 10, das Verhältnis zwischen der in den trägen Massen aufgespeicherten kinetischen Energie zu der in der Selbstinduktion aufgespeicherten magnetischen Energie bedeutet:

$$v=\frac{{}^1\!/_2\,\Theta\,\omega_0{}^2}{{}^1\!/_2\,L\,J_0{}^2}\,.$$

Ich erinnere daran, wie es uns damals nur unter großen Schwierigkeiten gelang, dieses Verhältnis kleiner als 1 zu machen; wir mußten die magnetische Energie in den Eisenmassen eines 20 PS-Motors aufspeichern, um die Energie der rotierenden Massen eines halbpferdigen, also 40 mal kleineren Motors zu erreichen. Hier, wo die trägen Massen und die Selbstinduktionen zwei gleichen Maschinen angehören, muß deshalb v ganz wesentlich größer als 1 sein[1]). Die übrigen Ausdrücke, die in Gleichung (12a) noch vor-

1) Um einen Anhalt für die wirkliche Größe von v zu bekommen, wollen wir unter der Annahme, daß Θ und L sich auf den Motor allein beziehen, die Ausdrücke für die Energien ${}^1\!/_2\,L\,J_0{}^2$ und ${}^1\!/_2\,\Theta\,\omega_0{}^2$ umformen. Führen wir die Zeitkonstante T_L und den Widerstand W_L der Feldspulen ein:

$$T_L=\frac{L}{W_L}=2\cdot\frac{{}^1\!/_2\,L\,J_0{}^2}{J_0{}^2\,W_L}=2\cdot\frac{{}^1\!/_2\,L\,J_0{}^2}{A_v}$$

($A_v=J_0{}^2\,W_L$ ist gleich den „Kupferverlusten" in den Feldspulen), so läßt sich die magnetische Energie schreiben:

$${}^1\!/_2\,L\,J_0{}^2={}^1\!/_2\,T_L\,A_v\,.$$

In derselben Weise läßt sich eine „Zeitkonstante" aus der Bewegungsgleichung des sich selbst überlassenen Motors:

$$\Theta\,\frac{d\,\omega}{d\,t}+R\,\omega=0$$

ableiten, wenn man das Bremsmoment $R\,\omega$, das von Reibung und Eisenverlusten herrührt, als proportional zu ω, d. h. R als konstant annimmt. Die Zeitkonstante, d. h. die Zeit, in der die Drehzahl des Motors auf den $e$ten Teil des Anfangswertes sinkt ($e=2{,}718\ldots$), ist dann

$$T_M=\frac{\Theta}{R}=2\cdot\frac{{}^1\!/_2\,\Theta\,\omega_0{}^2}{R\,\omega_0{}^2}=2\cdot\frac{{}^1\!/_2\,\Theta\,\omega_0{}^2}{A_l}$$

($A_l=R\,\omega_0{}^2$ ist die zur Überwindung von $R\omega_0$ erforderliche „Leerlaufleistung"). Aber auch, wenn nicht R, sondern das Bremsmoment $R\omega_0$ konstant ist, wie es namentlich bei kleinem ω_0 zutrifft, machen wir mit obigem Ansatz keinen großen Fehler. Denn eine einfache Rechnung zeigt, daß dann in der letzten Formel statt T_M die gesamte Auslaufzeit zu setzen ist, die sich von T_M nur

kommen, nämlich $\frac{m'}{\left(\frac{m}{\omega_0}\right)}$, $\frac{e'}{\left(\frac{e}{J_0}\right)}$ und $\frac{E'}{\left(\frac{e}{J_0}\right)} = \frac{E'}{\left(\frac{E}{J_0}\right)}$ werden gleich den Anstiegen der betreffenden Charakteristiken, falls wir den Maßstab des Diagramms so wählen, daß sowohl die Abszisse wie die Ordinate des Gleichgewichtspunktes gleich 1 wird. Die so gemessenen Anstiege sind dimensionslos und gestatten so einen direkten Vergleich zwischen elektrischen und mechanischen Charakteristiken. Schreibt man die Ausdrücke in der Form:

$$\frac{m'}{\left(\frac{m}{\omega_0}\right)} = \frac{\left(\frac{dm}{m}\right)}{\left(\frac{d\omega}{\omega_0}\right)},$$

so sieht man, daß sie gleich dem prozentuellen Zuwachs der Ordinaten, dividiert durch den prozentuellen Abszissenzuwachs,

---

um den Bruchteil $\frac{1}{e}$, das sind 37 Proz. unterscheidet, und dieser Fehler kommt hier, wo es sich nur um Größenordnungen handelt, nicht in Betracht. Wir können also schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\,\Theta\,\omega_0^2 = \tfrac{1}{2}\,T_M \cdot A_l$$

und somit

$$v = \frac{\tfrac{1}{2}\,\Theta\,\omega_0^2}{\tfrac{1}{2}\,L J_0^2} = \frac{T_M A_l}{T_L A_v}.$$

Die Leerlaufarbeit A_l ist bei Dynamomaschinen von gleicher Größenordnung wie die Kupferverluste A_v in den Feldspulen, im allgemeinen sogar größer als A_v. Es ist daher

$$v \geq \frac{T_M}{T_L},$$

also ungefähr gleich dem Verhältnis der beiden Zeitkonstanten. Nun erreicht, wie wir in § 10 sahen, in günstigen Fällen die Zeitkonstante der Feldspulen bei großen Maschinen Werte von einigen Sekunden, während die mechanischen Zeitkonstanten (die Auslaufzeiten) nach Minuten rechnen; bei kleineren Maschinen sind die Auslaufzeiten, aber auch die Zeitkonstanten der Spulen kleiner. Demnach ist die Größenordnung von v ungefähr 60, sagen wir 50 bis 100.

In der Tat ergab die Durchrechnung einer ausgeführten Maschine von 150 KW., 450 Umdr. pro Min. (S. P. Thompson, Die dynamoelektrischen Maschinen, 7. Aufl., Halle 1907, Bd. I, S. 521):

$$\tfrac{1}{2}\,L J_0^2 = 1740 \text{ Wattsec},$$
$$\tfrac{1}{2}\,\Theta\,\omega_0^2 = 110000 \quad „$$

also

$$v = 63.$$

sind. Wir wollen jene Ausdrücke als „spezifische Anstiege" der Charakteristiken bezeichnen. Sie haben eine viel allgemeinere Bedeutung als die bisher betrachteten Anstiege m' usw., weil ihr Betrag für Apparate gleicher Bauart stets der gleiche ist, unabhängig von Größe und Einzelausführung des betreffenden Apparats. Zum Beispiel ist für einen mit konstanter Drehgeschwindigkeit angetriebenen Hauptstromgenerator der spezifische Anstieg längs des unteren, annähernd geradlinigen Teiles der Charakteristik:

$$\frac{E'}{\left(\frac{E}{J_0}\right)} = 1$$

unabhängig von Größe und Drehzahl des Generators, und bei stärkerer magnetischer Beanspruchung gleich dem gleichen Bruchteil von 1, falls die Kraftliniendichte im Eisen den gleichen Wert hat. Ferner ist, wenn mehrere Apparate von gleicher Charakteristik hintereinander oder parallel geschaltet werden, der spezifische Anstieg der Gesamtcharakteristik gleich dem der einzelnen Charakteristiken.

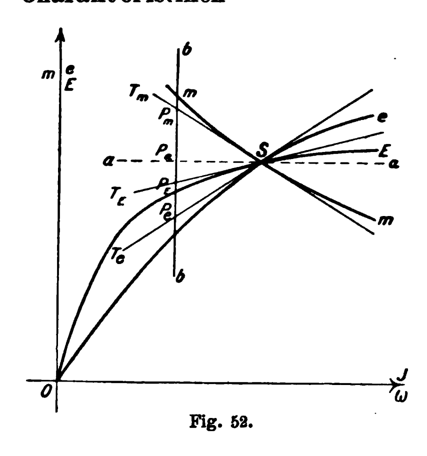


Fig. 52.

Mit Benutzung des neuen Begriffs des „spezifischen Anstiegs" läßt sich der Sinn von Gl. (12a) so ausdrücken:

Die Differenz der spezifischen Anstiege der elektrischen Charakteristiken $e(J)$ und $E(J)$ muß größer sein als der negativ genommene spezifische Anstieg der mechanischen Charakteristik $m(\omega)$, dividiert durch das Verhältnis v. Ob diese Bedingung erfüllt ist, erkennt man auf graphischem Wege folgendermaßen (Fig. 52).

Man zeichne in das elektrische Charakteristikendiagramm die mechanische Charakteristik $m(\omega)$ in einem solchen Maßstabe ein, daß derjenige ihrer Punkte, der dem Betriebszustande entspricht, mit dem Schnittpunkte S der beiden elektrischen Charakteristiken $E(J)$ und $e(J)$ zusammenfällt.

In S lege man an alle 3 Kurven Tangenten T_m, T_E und T_e und außerdem ziehe man durch S eine zur Abszissenachse paral-

lele Gerade $a\,a$. Zieht man dann irgendeine zur Ordinatenachse parallele Gerade $b\,b$, welche die 3 Tangenten und die Gerade $a\,a$ in den 4 Punkten P_m, P_E, P_e und P_a schneidet, so verlangt das Stabilitätskriterium (12a), daß die Strecke $\overline{P_m P_a}$, dividiert durch das Verhältnis v, kleiner ist als die Strecke $\overline{P_E P_e}$; wobei diese Strecken positiv zu nehmen sind, wenn in Fig. 52 links vom Schnittpunkte S die Charakteristik m oberhalb $a\,a$ und E oberhalb von e verläuft.

Zur weiteren Diskussion von Gleichung (12) wollen wir einige spezielle Fälle betrachten.

Zunächst sei angenommen, der Idealfall sei erfüllt, daß die Drehzahl des Motors unabhängig von der Belastung ist (S. 147), d. h. daß die elektrischen Charakteristiken von Generator und Motor einander kongruent sind. Dann ist auch stets $e' = E'$ und die Stabilitätsbedingung (12) reduziert sich auf:

$$\frac{m'}{\Theta} > 0,$$

d. h.

$$m'(\omega_0) > 0. \tag{12b}$$

Wir gelangen so zu dem Satze:

„Eine ‚ideale' Kraftübertragungsanlage mit Reihenschlußmaschinen arbeitet dann und nur dann stabil, wenn das Bremsmoment der von dem Motor angetriebenen Arbeitsmaschine mit zunehmender Umdrehungszahl zunimmt."

Ist jener Idealfall nicht realisiert, so ist nach Gl. (12) um so leichter Stabilität zu erreichen, je größer $e' - E'$ ist[1]; ist m' erheblich größer als null, so kann $e' - E'$ negativ sein, ohne daß Labilität eintritt, während bei negativem m', d. h. bei abfallender mechanischer Charakteristik der Arbeitsmaschine, $e' - E'$ oberhalb eines positiven Betrages liegen muß, der durch Gl. (12) gegeben ist.

Jedenfalls geht aus der Diskussion hervor, daß es stets für die Stabilität günstig ist, wenn

$$e' - E' > 0 \tag{15}$$

---

1) Bei sehr steil abfallender Charakteristik m wäre der Fall denkbar, daß zur Erfüllung von Bedingung (12) $e' - E'$ so groß gemacht werden müßte, daß Gl. (13) nicht mehr erfüllt wäre; dann darf man, um doch noch Stabilität zu erzielen, $e' - E'$ nur so groß machen, daß Gl. (13) noch erfüllt ist, und muß dann Gl. (12) durch Vergrößerung des Trägheitsmomentes Θ (Anbringung eines Schwungrades) befriedigen.

ist. Da die Charakteristiken $e(J)$ und $E(J)$ um so flacher verlaufen, je stärker das Magneteisen gesättigt ist, so folgt daraus die Regel:

Zur Vermeidung von Pendelungen bei Kraftübertragungsanlagen mit Reihenschlußmaschinen ist es zweckmäßig, den Motor so zu berechnen, daß er mit geringerer Sättigung arbeitet als der Generator [1]).

Übrigens wird auch bei gleicher Sättigung von Motor und Generator durch die Maschinenwiderstände bewirkt, daß Gl. (15) erfüllt ist.

Mit in Kauf nehmen muß man bei Erfüllung von Gl. (15) einen gewissen Abfall der Tourenzahl des Motors bei Belastung, denn nach Gl. (14) fällt bei positivem $e'-E'$ die statische mechanische Charakteristik des Motors ab.

Endlich ist noch zu bemerken, daß bei geringer Eisensättigung, d. h. bei geringer Belastung des Motors, die Charakteristiken e und E nahezu gerade Linien werden, die durch den Nullpunkt gehen; dann wird stets $e'=E'$, auch wenn bei Vollast e' wesentlich größer als E' ist. Ist ein solcher Motor mit Arbeitsmaschinen mit abfallender mechanischer Charakteristik belastet, so wird er zwar bei Vollast stabil laufen können, bei geringer Belastung aber pendeln. Daher eignet sich diese Art von Kraftübertragung schlecht zum Antrieb von Arbeitsmaschinen mit abfallender mechanischer Charakteristik.

§ 14. Reihenschluß-Kraftübertragung mit einem parallel zur Feldwicklung des Motors geschalteten Widerstande.

Wenn man bei dem zuletzt behandelten Kraftübertragungssystem die Umdrehungszahl des Motors veränderlich machen will,

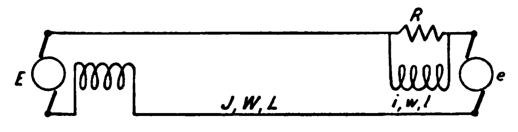


Fig. 53.

so macht man das häufig dadurch, daß man parallel zu dessen Feldwicklung einen Regulierwiderstand schaltet (Fig. 53). Es sei

1) Daß Arnold (l. c., S. 626) gerade zum entgegengesetzten Resultat gelangt, beruht wohl auf einem Versehen.

hier gleich bemerkt, daß, streng genommen, auch in dem Falle des vorigen Paragraphen ein ähnliches Schema wie das der Fig. 53 der Rechnung zugrunde zu legen wäre, und zwar wegen der Wirbelströme, die bei Änderungen des Magnetfeldes in dem massiven Eisen des Motors auftreten; denn, wie aus der Transformatortheorie bekannt ist, wirken solche Wirbelströme wie ein zur Selbstinduktion der Feldspule parallel geschalteter Widerstand (vgl. Fig. 56, S. 178). Eigentlich müßten auch beim Generator, sowohl hier wie in § 13, die Wirbelströme in der gleichen Weise berücksichtigt werden. — Es ist ohne weiteres klar, daß die Anordnung der Fig. 53 für die Stabilität ungünstiger ist; denn wegen der Selbstinduktion der Feldwicklung hat der Strom in ihr das Bestreben, konstant zu bleiben; bei Stromänderungen fließt der zusätzliche Strom hauptsächlich durch den Nebenschlußwiderstand, so daß der Motor sich in seinem Verhalten mehr dem vollkommen instabilen Motor mit konstanter Erregung (§ 12B) nähern muß.

Die quantitative Durchrechnung der Stabilitätsverhältnisse wird etwas komplizierter als bisher; es empfiehlt sich, hier die allgemeine Methode des § 4 anzuwenden.

Dazu sind zunächst die Gleichungen aufzustellen, denen das System unterworfen ist (die Gleichungen (1) des § 4).

Wir behalten die im vorigen Paragraphen verwendeten Bezeichnungen im wesentlichen bei, nur müssen wir jetzt Widerstand w und Selbstinduktion l der Feldwicklung des Motors besonders bezeichnen, so daß W und L sich jetzt nur noch auf den übrigen Teil des Stromkreises (Generator, Fernleitung und Anker des Motors) beziehen. R ist der zur Feldwicklung des Motors parallel geschaltete Widerstand. Dann kommt als neue Gleichung hinzu, wenn wir den Strom in der Feldwicklung des Motors mit i bezeichnen:

$$w i + l \frac{d i}{d t} = R \cdot (J - i), \tag{1}$$

außerdem gelten die beiden Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen, die hier lauten:

$$W J + L \frac{d J}{d t} + w i + l \frac{d i}{d t} + \omega h(i) = \Omega_0 H(J), \tag{2}$$

$$\Theta \frac{d \omega}{d t} + m(\omega) = J \cdot h(i). \tag{3}$$

Also lauten, geeignet geordnet, die den Gleichungen (1) des § 4 entsprechenden Gleichungen hier:

$$\left.\begin{aligned} - RJ + (w + R)\, i + l\, \frac{d\,i}{d\,t} &= F_1 = 0\,, \\ WJ - \Omega_0 H(J) + L\, \frac{d\,J}{d\,t} + w\,i + \omega\, h(i) + l\, \frac{d\,i}{d\,t} &= F_2 = 0\,, \\ -J\,h(i) + \Theta\, \frac{d\,\omega}{d\,t} + m\,(\omega) &= F_3 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Wie es sein muß, sind ebenso viele Gleichungen vorhanden wie Variable, nämlich drei (J, i, ω).

Nach § 4 erhält man aus diesen Gleichungen direkt die zur Differentialgleichung der kleinen Schwingungen gehörige „charakteristische“ Gleichung, indem man die Determinantengleichung bildet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \alpha\, \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} + \alpha^2\, \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{x}}, & \frac{\partial F_1}{\partial y} + \alpha\, \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} + \alpha^2\, \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{y}}, & \cdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \alpha\, \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}} + \alpha^2\, \frac{\partial F_2}{\partial \ddot{x}}, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

[Gl. (6a), § 4.]

Hierin sind x, y, . . die den Zustand des Systems bestimmenden Variablen, also hier J, i, ω. Bildet man aus den Gleichungen (4) die Differentialquotienten und setzt sie in die Determinante ein, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} -R\,, & w + R + \alpha l\,, & 0 \\ W - \Omega_0 H' + \alpha L, & w + \omega_0 h' + \alpha l, & h \\ -h\,, & -J_0 h'\,, & m' + \alpha\Theta \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Auflösung der Determinante gibt:

$$R\,[(w + \omega_0 h' + \alpha l)\,(m' + \alpha\,\Theta) + J_0 h h'] +$$
$$+ (w + R + \alpha l)\,[(W - \Omega_0 H' + \alpha L)\,(m' + \alpha\Theta) + h^2] = 0,$$

und wenn man nach Potenzen von α ordnet:

$$\Theta L l \alpha^3 + \{\Theta l\,(R + W - \Omega_0 H') + \Theta L\,(w + R) + l L m'\}\,\alpha^2 +$$
$$+ \{\Theta R\,(\omega_0 h' + w) + \Theta\,(w + R)\,(W - \Omega_0 H') +$$
$$+ l m'\,(R + W - \Omega_0 H') + h^2 l + L m'\,(w + R)\}\,\alpha +$$
$$+ \{R m'\,(\omega_0 h' + w) + R J_0 h h' + (w + R)\, m'\,(W - \Omega_0 H') +$$
$$+ (w + R)\, h^2\} = 0 \qquad (6)$$

als die gesuchte „charakteristische Gleichung“.

Wir wollen auch hier, ebenso wie beim vorigen Beispiel, die Anstiege E' und e' der elektrischen Charakteristiken von Generator und Motor einführen. Dazu zerlegen wir:

$$W = W_1 + W_a,$$

worin W_1 der gesamte Generatorwiderstand einschließlich Fernleitung und W_a der Ankerwiderstand des Motors ist; die Generatorcharakteristik hat dann die Gleichung:

$$E(J) = \Omega_0 H(J) - J W_1,$$

also wird

$$E'(J) = \Omega_0 H'(J) - W_1$$

und

$$W - \Omega_0 H' = W_a - E'. \qquad (7)$$

Die Gleichung der statischen elektrischen Motorcharakteristik für konstante Drehzahl $\omega = \omega_0$ lautet:

$$e(J) = \omega_0 h(i) + iw + JW_a,$$

oder, da im Gleichgewichtszustande

$$iw = (J - i) R,$$

also

$$i = J \frac{R}{w + R}$$

ist:

$$e(J) = \omega_0 \cdot h\left(J \frac{R}{w + R}\right) + J \cdot \left(\frac{wR}{w + R} + W_a\right).$$

Also wird

$$e'(J) = \omega_0 h' \cdot \frac{R}{w + R} + \frac{wR}{w + R} + W_a$$

und

$$R(\omega_0 h' + w) = (w + R)(e' - W_a). \qquad (8)$$

Einsetzung von Gleichung (7) und (8) in (6) ergibt, wenn man letztere noch durch $\Theta l L$ dividiert, um den Koeffizienten a_0 von α^3 gleich 1 zu machen, die charakteristische Gleichung (6) in der Form:

$$\alpha^3 + \left\{\frac{R + W_a - E'}{L} + \frac{w + R}{l} + \frac{m'}{\Theta}\right\} \alpha^2 +$$

$$+ \left\{\frac{(w + R)(e' - E')}{lL} + \frac{h^2 + m'(R + W_a - E')}{\Theta L} + \frac{m'(w + R)}{\Theta l}\right\} \alpha +$$

$$+ \frac{(w + R)[h^2 + m'(e' - E')] + R J_0 h h'}{\Theta L l} = 0. \qquad (6\,a)$$

Eine andere Form dieser Gleichung, die für den Vergleich mit dem vorhin behandelten einfacheren Falle geeignet ist, erhält man, wenn man Gleichung (6a) durch

$$R\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{L}\right)=R\,\frac{L+l}{Ll}$$

dividiert:

$$\frac{1}{R}\,\frac{L\,l}{L+l}\,\alpha^3+\left\{1+\frac{1}{R}\,\frac{L\,l}{L+l}\left(\frac{W_a-E'}{L}+\frac{w}{l}+\frac{m'}{\Theta}\right)\right\}\alpha^2+$$

$$+\left\{\left(1+\frac{w}{R}\right)\left(\frac{e'-E'}{l+L}+\frac{m'}{\Theta}\right)+\frac{l}{R}\,\frac{(W_a-w-E')\,m'+h^2}{\Theta(l+L)}\right\}\alpha+$$

$$+\frac{\left(1+\frac{w}{R}\right)[h^2+m'(e'-E')]+J_0\,h\,h'}{\Theta(L+l)}=0. \qquad (6\text{b})$$

Aus der letzten Form (6b) der charakteristischen Gleichung wollen wir die Stabilitätsbedingungen ableiten. Aus ihr ergeben sich die Koeffizienten $a_0 \cdots a_3$ zu:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{R}\,\frac{L\,l}{L+l};\\
a_1 &= 1+\frac{1}{R}\,\frac{L\,l}{L+l}\left(\frac{W_a-E'}{L}+\frac{w}{l}+\frac{m'}{\Theta}\right);\\
a_2 &= \left(1+\frac{w}{R}\right)\left(\frac{e'-E'}{l+L}+\frac{m'}{\Theta}\right)+\frac{l}{R}\,\frac{(W_a-E'-w)m'+h^2}{\Theta(L+l)};\\
a_3 &= \frac{\left(1+\frac{w}{R}\right)[h^2+m'(e'-E')]+J_0\,h\,h'}{\Theta(L+l)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Da $a_0 > 0$ ist, lassen sich hier die Routh-Hurwitzschen Stabilitätsbedingungen anwenden, sie lauten hier, wie im § 4 gezeigt:

$$a_1 > 0, \qquad (10\text{a})$$

$$a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0, \qquad (10\text{b})$$

$$a_3 > 0. \qquad (10\text{c})$$

Um die Diskussion dieser recht komplizierten Stabilitätsbedingungen zu erleichtern, vergleichen wir sie mit den entsprechenden Bedingungen des vorigen, einfacheren Beispiels, nämlich den Gleichungen (12) und (13) des vorigen Paragraphen. Wenn unsere Rechnung richtig ist, so müssen die Bedingungen

(10a—c) in jene Gleichungen übergehen, falls wir den Nebenschlußwiderstand beim Motor weglassen, d. h. $R = \infty$ setzen. Da in den Gleichungen (9) R nur im Nenner auftritt, ist das ohne Schwierigkeit möglich; für $R = \infty$ gehen die Gleichungen (9) über in:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{e' - E'}{l + L} + \frac{m'}{\Theta}, \\ a_3 &= \frac{h^2 + J_0 h h' + m'(e' - E')}{\Theta(L + l)}. \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

Es sind also a_1, a_2 und a_3 identisch geworden mit dem Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 des früheren Beispiels [vgl. Gl. (10) und (11) des vorigen Paragraphen], denn die gesamte Selbstinduktion des Stromkreises, die wir dort mit L bezeichnet hatten, ist in der jetzigen Bezeichnungsweise gleich $L + l$. Setzen wir die Ausdrücke (9a) in die Stabilitätsbedingungen (10a—10c) ein, so sehen wir:

Für $R = \infty$ geht

1. Bedingung (10a) über in die Gleichung: $1 > 0$, ist also stets erfüllt;

2. Bedingung (10b) über in:

$$a_2 = \frac{e' - E'}{l + L} + \frac{m'}{\Theta} > 0,$$

d. h. sie wird identisch mit der ersten Stabilitätsbedingung des vorigen Beispiels [Gl. (12), § 13];

3. Bedingung (10c) geht über in:

$$a_3 = \frac{m'(e' - E') + h^2 + J_0 h h'}{\Theta(L + l)} > 0,$$

d. h. sie wird identisch mit der zweiten Stabilitätsbedingung des vorigen Beispiels [Gl. (13), § 13].

Wir erhalten also wirklich dadurch, daß wir $R = \infty$ setzen, aus den Stabilitätsbedingungen (10a—c) die Stabilitätsbedingungen des vorigen Beispiels, wie es auch sein muß. Das mag einerseits als Probe auf unsere Rechnung dienen, andererseits erleichtert es uns die Diskussion der neuen Stabilitätsbedingungen, denn wir können nun auch umgekehrt sagen:

Schaltet man zur Feldwicklung des Motors einen Widerstand parallel, d. h. gibt man R einen endlichen Wert, so erleiden die

Stabilitätsbedingungen des § 13 folgende Änderungen: Bedingung (12) geht über in (10b), (13) in (10c) und außerdem kommt noch eine neue Bedingung (10a) hinzu. Wir können so die Diskussion der neuen Stabilitätsbedingungen auf die der alten zurückführen: es braucht nur noch besprochen zu werden, wie sich infolge des Hinzutretens von R die Stabilitätsverhältnisse geändert haben.

Von diesem Gesichtspunkt aus ist über die Stabilitätsbedingungen (10a—c) folgendes zu sagen:

1. Wenn die Bedingung (10c) nicht erfüllt ist, haben wir Labilität erster Art, d. h. es treten keine Pendelungen auf, sondern eine Abweichung vom Gleichgewicht nimmt beständig zu, bis der nächste stabile Punkt erreicht ist. Pendelungen können nur auftreten, wenn Bedingung (10c) erfüllt ist. Die Bedingung selbst ist im wesentlichen dieselbe geblieben wie früher; denn multipliziert man sie mit der positiven Größe

$$\frac{\Theta(l+L)}{1+\frac{w}{R}},$$

so lautet sie:

$$m'(e'-E')+h^2+\frac{J_0 h h'}{1+\frac{w}{R}}>0; \qquad (10c')$$

sie unterscheidet sich in dieser Form von der früheren Bedingung (13) (§ 13) nur durch den von 1 nicht sehr verschiedenen Faktor

$$\frac{1}{1+\frac{w}{R}}$$

des Gliedes $J_0 h h'$. Sie hat auch, wie eine einfache Rechnung zeigt, die der auf S. 149—153 ausgeführten vollkommen analog ist, genau dieselbe geometrische Bedeutung wie jene: sie verlangt nämlich, falls die statische mechanische Charakteristik des Motors abfällt $[M_0'(\omega_0)<0]$, die Erfüllung, im andern Falle $[M_0'(\omega_0)>0]$ die Nichterfüllung des mechanischen Stabilitätskriteriums B. Oder auch, mit Benutzung der elektrischen statischen Charakteristiken: falls die mechanische Charakteristik der vom Motor angetriebenen Arbeitsmaschine ansteigt $[m'(\omega)>0]$, verlangt Gl. (10c), daß die statischen elektrischen Charakteristiken von Generator und Motor dem einfachen elektrischen Stabilitätskrite-

rium (Kriterium A) genügen; im andern Fall $[m'(\omega) < 0]$ verlangt sie die Nichterfüllung dieses Kriteriums.

Da oben gezeigt werden konnte, daß Bedingung (13) des § 13 fast ausnahmslos ohne weiteres erfüllt ist, so gilt dasselbe von Bedingung (10c).

2. Bedingung (10a) benutzen wir in der Form:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{R + W_a - E'}{L} + \frac{w + R}{l} + \frac{m'}{\Theta} > 0. \qquad (10\text{a}')$$

[Die linke Seite ist gleich dem Koeffizienten von α^2 in Gl. (6a)]. In dieser Form ist sie der quantitative Ausdruck für das, was wir oben zu Beginn dieses Paragraphen qualitativ bemerkt hatten, daß nämlich der Hauptstrommotor mit einem Nebenschluß zur Feldwicklung schon deshalb leicht instabil ist, weil er sich in seinem Verhalten dem konstant erregten Motor nähert. Denn Bedingung (10a′) hat große Ähnlichkeit mit der Stabilitätsbedingung dieses letzteren, nämlich der Bedingung

$$\frac{w - H'(J_0)}{L} + \frac{m'(\omega_0)}{\Theta} = \frac{w_a - E'}{L} + \frac{m'(\omega_0)}{\Theta} > 0, \qquad (\text{Gl. } 28, \text{ § } 12)$$

worin w_a der gesamte Widerstand des Schließungskreises des Generators, also damals gleich dem Widerstande des Motorankers war. Hier ist dieser Widerstand $w_a = W_a + R$, weil, wie oben schon bemerkt, die Feldwicklung wegen ihrer Selbstinduktion für schnellere Änderungen einen so großen Widerstand bildet, daß diese sich im wesentlichen nur durch R ausgleichen. Somit stimmen die beiden Stabilitätsbedingungen miteinander überein bis auf das Glied $\frac{w+R}{l}$ in (10a′), und auch diese Verschiedenheit wird beliebig klein, wenn, wie wir in der obigen Betrachtung annahmen, die Zeitkonstante $\frac{l}{w+R}$ der durch R geschlossenen Feldwicklung genügend groß ist, nämlich so groß, daß der Strom in ihr und damit das Magnetfeld den Änderungen des Hauptstromes nicht mehr merklich folgt.

Das ist der Fall, wenn R und w sehr klein sind. Dann haben wir, genau wie beim konstant erregten Motor, stets Instabilität in Form von Pendelungen zu erwarten, falls nicht $\frac{m'}{\Theta}$ sehr groß ist. Wenn nun auch im allgemeinen Fall R und w nicht so klein

sind, daß das Glied $\frac{w+R}{l}$ vernachlässigt werden kann, so wird trotzdem die linke Seite von Gl. (10a′) leicht negativ, wenn nicht m' einen erheblichen positiven Wert hat. Denn nehmen wir z. B. an, m' sei null und Motor und Generator seien zwei gleiche Maschinen (annähernd muß das stets zutreffen, weil immer nur ein Motor mit einem Generator zusammen arbeiten kann), so wird $l = L$ und Bedingung (10a′) lautet:

$$2R + W_a + w - E' > 0. \tag{10a''}$$

Nun ist w von gleicher Größenordnung wie W_a, und wenn durch das Hinzuschalten von R eine einigermaßen in Betracht kommende Änderung der Umdrehungszahl erzielt werden soll, so muß R ebenfalls von dieser Größenordnung sein. Andererseits muß E', solange der Generator nicht gesättigt ist, aus Gründen der Wirtschaftlichkeit ganz wesentlich größer sein als die inneren Widerstände der Maschinen; in diesem Fall läßt sich Bedingung (10a″) überhaupt nicht erfüllen, und auch wenn der Generator stärker gesättigt ist, wird die Bedingung höchstens eben erfüllt sein. Da aber, wie wir unten sehen werden, Bedingung (10a) nicht nur knapp erfüllt, d. h. a_1 eben größer als null sein darf, sondern a_1 wegen Bedingung (10b) eine gewisse positive Mindestgröße haben muß, können wir sagen:

Falls m' null oder negativ ist, ist der Zustand stets labil; abfallende mechanische Charakteristiken der vom Motor angetriebenen Arbeitsmaschine sind daher im vorliegenden Falle ausgeschlossen.

Ebenso ist bei Leerlauf des Motors Bedingung (10a) nicht erfüllt; denn dann ist nicht nur m' sehr klein (wenn auch positiv), sondern auch E' sehr groß, weil dann der Generator schwach gesättigt ist. Es folgt daraus die Regel, daß man bei einem solchen Motor den Nebenschlußwiderstand nur bei Belastung zur Feldwicklung parallel schalten darf.

Im übrigen (d. h. bei Belastung und positivem m') wird m' meistens gegeben sein; dann gibt Bedingung (10a′) eine untere Grenze für den Widerstand R an.

3. Bedingung (10b) schreiben wir zweckmäßig in der Form:

$$a_2 > a_0 \frac{a_3}{a_1} > 0. \tag{10b'}$$

Sie zeigt, daß die Stabilitätsverhältnisse noch in anderer Hinsicht gegen früher [Gl. (12), § 13] ungünstiger geworden sind, nämlich deshalb, weil der Koeffizient a_2 nicht mehr schlechtweg größer als null, sondern größer als die positive Größe $a_0 \frac{a_3}{a_1}$ sein muß. Es ist deshalb vorteilhaft, wenn diese Größe möglichst klein ist, d. h. wenn a_3 und a_0 klein und a_1 groß ist. Da nach dem Vorigen m' positiv sein muß, läßt sich a_3 höchstens dadurch klein machen, daß man $(e'-E')$ negativ macht; das hilft aber nichts, weil dadurch a_2 noch mehr verkleinert wird. a_3 ist also als gegeben zu betrachten; man kann somit $a_0 \frac{a_3}{a_1}$ nur dadurch klein machen, daß man $\frac{a_1}{a_0}$, d. h. die linke Seite von Gl. (10a'), groß macht. Es genügt also nicht, daß Bedingung (10a') gerade erfüllt ist, sondern ihre linke Seite muß **erheblich** größer als null sein $\left(\text{nämlich größer als } \frac{a_3}{a_2}\right)$. Dieses Ergebnis hatten wir oben bei Besprechung von Bedingung (10a) schon vorweg genommen; es folgt daraus, um das noch einmal zu wiederholen, eine untere Grenze für R.

Andererseits muß a_2 selbst groß sein. Gl. (9) zeigt, daß a_2 sich von dem entsprechenden Koeffizienten a_1 des früheren Beispiels durch das additive Glied

$$\frac{l}{R} \frac{(W_a-w-E')m'+h^2}{\Theta(L+l)}$$

unterscheidet. In diesem ist von den beiden Summanden im Zähler der erste stets negativ, weil m' und E' positiv und W_a-w annähernd null ist, während der zweite, h^2, stets positiv ist. Schreiben wir letzteren in der Form

$$\frac{hJ_0}{\omega_0} \cdot \frac{h\omega_0}{J_0} = \frac{m}{\omega_0} \cdot \frac{e}{J_0} = \frac{m}{\omega_0} \frac{E}{J_0}$$

(nur angenähert richtig, weil $h\omega_0$ die im Motor induzierte EMK., nicht seine Klemmenspannung ist), und vernachlässigen im ersten Summanden W_a-w, so lautet der Zähler des Zusatzgliedes:

$$-E'm' + \frac{E}{J_0} \frac{m}{\omega_0}.$$

Nun ist E' stets kleiner als $\frac{E}{J_0}$, oder ihm höchstens gleich

(letzteres nur, wenn der Generator nicht gesättigt ist), also ist obiger Ausdruck stets positiv, solange m' nicht wesentlich größer als $\frac{m}{\omega_0}$ ist. Im allgemeinen ist daher das hinzugekommene Glied von a_2 günstig für die Stabilität. Und auch wenn m' so groß ist, daß das Zusatzglied negativ ist $\left(m' > \frac{m}{\omega_0}\frac{E}{J_0}\frac{1}{E'} > \frac{m}{\omega_0}\right)$, so wird doch dadurch die Stabilität nicht schlechter, weil dann in dem ersten Term von a_2 das Glied $\frac{m'}{\Theta}$ groß wird. Wir können auch, um das noch deutlicher zu zeigen, in dem Ausdruck für a_2 die Glieder, die m' enthalten, zusammenfassen; das gibt:

$$\frac{m'}{\Theta}\frac{1}{R}\left\{w + R + \frac{l}{l+L}(W_a - w - E')\right\} = \frac{m'}{\Theta}\frac{1}{R}\frac{Ll}{L+l}\left\{\frac{w+R}{l} + \frac{R + W_a - E'}{L}\right\},$$

oder, nach Gl. (10a′)

$$= \frac{m'}{\Theta}a_0\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{m'}{\Theta}\right).$$

Da, wie oben erörtert, $\frac{a_1}{a_0}$ wegen Bedingung (10b′) erheblich größer als null sein muß, so ist der Faktor von $\frac{m'}{\Theta}$, falls überhaupt Stabilität vorhanden ist, positiv; positives m', d. h. ansteigende mechanische Charakteristik der Arbeitsmaschine ist also auch hiernach stets günstig für die Stabilität. Jedoch ist der Einfluß von m' auf die Stabilität klein, denn a_1 ist im allgemeinen kleiner als 1 und $\frac{m'}{\Theta}$ ist nach Gl. (12a), § 13, klein gegen $\frac{e'}{l+L}$ und $\frac{E'}{l+L}$; wir können daher ohne großen Fehler die Glieder mit m' in dem Ausdruck für a_2 weglassen und die dritte der Gleichungen (9) schreiben:

$$a_2 = \left(1 + \frac{w}{R}\right)\frac{e' - E'}{L+l} + \frac{l}{R}\frac{h^2}{\Theta(L+l)} = \left(1 + \frac{w}{R}\right)\frac{e' - E'}{L+l} + a_0\frac{h^2}{\Theta L}.$$

Damit läßt sich Bedingung (10b′) schreiben:

$$\left(1 + \frac{w}{R}\right)\frac{e' - E'}{L+l} > a_0\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{h^2}{\Theta L}\right). \qquad (10b'')$$

Da $\frac{h^2}{\theta L}$ von gleicher Größenordnung wie a_3, a_1 aber im allgemeinen kleiner als 1 ist, so ist die rechte Seite dieser Gleichung im allgemeinen positiv, so daß Stabilität nur dann erzielt werden kann, wenn $(e' - E')$ einen gewissen positiven Betrag überschreitet. Auch hier ist es also unter allen Umständen günstig für die Stabilität, wenn der Generator stärker gesättigt ist als der Motor.

Fassen wir die Hauptpunkte zusammen, die die Diskussion der Stabilitätsbedingungen ergeben hat:

1. Die mechanische Charakteristik der vom Motor angetriebenen Arbeitsmaschine darf nicht abfallen.

2. Bei Leerlauf darf R nicht zur Feldwicklung parallel geschaltet sein.

3. Bei Belastung darf R nicht unter einen gewissen Wert verkleinert werden.

4. Der Generator muß mit starker magnetischer Sättigung arbeiten.

5. Der Motor soll möglichst schwach, jedenfalls aber schwächer als der Generator gesättigt sein.

Diese Bedingungen sind vor allem beim Entwurf von Kraftübertragungsanlagen mit Reihenschlußmaschinen zu berücksichtigen; sie geben die Hauptgesichtspunkte an, die zur Erzielung guter Stabilität zu beachten sind, erheben aber nicht den Anspruch, in jedem Falle präzise Auskunft über die Stabilität zu geben. Vielmehr läßt sich die Stabilität einer gegebenen Anordnung, z. B. einer projektierten fertig durchgerechneten Anlage, genau nur dadurch beurteilen, daß man die Zahlenwerte in die eigentlichen Stabilitätsbedingungen (10a—c) einsetzt.

Bemerkt werden möge noch, daß von den letzten 5 Bedingungen die dritte und fünfte zum Teil dasselbe fordern. Denn praktisch liegen die Verhältnisse so, daß verlangt wird, die Umdrehungszahl des Motors in einem vorgeschriebenen Verhältnisse erhöhen zu können. Dazu muß bei gleicher Leistung, also gleicher Spannung, das Motorfeld im gleichen Verhältnis geschwächt werden. Die dazu nötige Verringerung des Feldstromes und entsprechend des Widerstands R muß aber um so größer sein, je stärker der Motor gesättigt ist; bei vorgeschriebener unterer Grenze von R (Bedingung 3) läßt sich daher eine bestimmte Erhöhung der Dreh-

zahl nur bei genügend großem Werte von e' erzielen, es fordert also auch Bedingung 3, ebenso wie 5, schwache Sättigung des Motors.

Alles in allem hat die Diskussion gezeigt, daß bei dem behandelten Kraftübertragungssystem sehr leicht Pendelungen auftreten; man vermeidet deshalb am besten die Regulierung durch einen Nebenschlußwiderstand überhaupt, und ändert die Drehzahl, wenn erforderlich, entweder durch Abschalten[1]) eines Teiles der Feldwicklung, oder durch Bürstenverstellung, wie es Thury bei seinen Motoren für konstanten Strom tut (siehe den folgenden Paragraphen). Namentlich diese letztere Art der Regulierung ist zu empfehlen, weil bei ihr gleichem Strome stets gleiche magnetische Sättigung des Motors entspricht. Das hat den Vorteil, daß die für konstante Drehzahl geltende elektrische Charakteristik des Motors bei allen Drehzahlen die gleiche bleibt; wenn also der Idealfall, daß Motor- und Generatorcharakteristik einander kongruent sind (vgl. S. 147), für eine Drehzahl erfüllt ist, so bleibt er es auch für alle, und daher läßt sich dann bei allen Geschwindigkeiten Unabhängigkeit der Drehzahl von der Belastung erzielen.

Schließlich kann man, falls diese beiden Arten der Geschwindigkeitsregulierung nicht zulässig sind (z. B. bei vorhandenen Anlagen) sich dadurch helfen, daß man dem Nebenschlußwiderstande R eine so große Selbstinduktion L' gibt, daß seine Zeitkonstante $\frac{L'}{R}$ gleich der Zeitkonstante $\frac{l}{w}$ der Feldwicklung wird. Denn in zwei parallel geschalteten Selbstinduktionen mit gleichen Zeitkonstanten haben die Ströme den gleichen Verlauf, bleiben also einander stets proportional; der Strom in jeder von ihnen muß daher dauernd demselben Bruchteil des Gesamtstromes gleich bleiben. Dann hängt der Strom in der Feldwicklung und damit das Magnetfeld eindeutig vom Hauptstrom ab, ebenso wie bei den beiden andern Regulierungsmethoden, und dann gilt nicht mehr die Theorie dieses Paragraphen, sondern die des einfachen Motors ohne Nebenschließung (§ 13).

---

1) Nicht Kurzschließen, weil die in den kurzgeschlossenen Windungen induzierten Sekundärströme ebenso wirken würden wie ein Nebenschluß zur Feldwicklung.

§ 15. Verteilungssysteme für konstanten Strom (Seriensysteme).

A. Das Bernsteinsche System.

A. Bernstein[1]) hat wohl zum ersten Male darauf hingewiesen, daß ein mit konstantem Drehmoment angetriebener Hauptstromgenerator konstanten Strom liefert, und darauf ein Stromverteilungssystem aufgebaut, bei dem sämtliche Verbraucher in Serie geschaltet sind. In neuerer Zeit hat ein ähnliches System, das Thurysche[2]) Hochspannungs - Gleichstrom - Kraftübertragungssystem, Bedeutung erlangt.

Daß ein solcher Generator unabhängig vom Schließungswiderstande konstanten Strom liefert, folgt daraus, daß sein widerstehendes Drehmoment, abgesehen von den Reibungs- usw. Drehmomenten, proportional dem Ankerstrom J und dem Magnetfelde $H(J)$ ist; dieses widerstehende Drehmoment muß bei Gleichgewicht gleich dem von Antriebsmotor ausgeübten Moment M sein:

$$J \cdot H(J) = M. \qquad (1)$$

Da das Magnetfeld $H(J)$ eindeutig vom Ankerstrom J abhängt, hängt nach Gleichung (1) auch M eindeutig mit J zusammen; bei konstant gehaltenem M muß also auch der Strom J konstant bleiben. Antriebsmotore, die ein konstantes Drehmoment liefern, lassen sich leicht finden. Die meisten technischen Motore (Dampfmaschinen, Gasmotore, Wasserturbinen) liefern überhaupt an und für sich ein von der Drehzahl unabhängiges Drehmoment, und erst durch besondere Regulierungsvorrichtungen wird das Drehmoment in der Weise von der Drehzahl abhängig gemacht, daß sich bei allen verlangten Drehmomenten, d. h. bei jeder Belastung, nahezu dieselbe Drehzahl einstellt. Läßt man daher bei einer Dampfmaschine oder Wasserturbine den Regulator weg, so hat man ohne weiteres einen Motor, der das gewünschte konstante Drehmoment liefert.

Allerdings ist praktisch die Konstanz des Drehmomentes nur annähernd vorhanden; in Wirklichkeit wird es mit zunehmender Drehgeschwindigkeit stets etwas abnehmen; von den Ursachen

---

1) A. Bernstein, Elektrot. Ztschr. 10, S. 506—518, 1889.

2) Siehe z. B. Elektrot. Ztschr. 27, S. 1091—1094, 1906 und Arnold, Die Gleichstrommaschine, Bd. II, S. 638—646, Leipzig 1903.

dafür seien hier nur angeführt der mit der Geschwindigkeit zunehmende Druckabfall, den der Dampf oder das Wasser in den Leitungen erfahren, und ferner die Eigenreibung der Maschine, die ebenfalls mit zunehmender Drehgeschwindigkeit zunimmt. Ferner bewirken, wie schon oben angedeutet, die Lagerreibung und Eisenverluste des Generators, daß auch bei konstantem Drehmoment des Antriebsmotors der Strom nicht völlig konstant bleibt. Alle diese Umstände lassen sich dadurch berücksichtigen, daß man das von der Antriebsmaschine ausgeübte Drehmoment M nicht als konstant annimmt, sondern es sich durch eine Charakteristik $M(\Omega)$ als Funktion der Drehzahl Ω gegeben denkt. Man muß dann nur, ähnlich wie wir es schon in § 9 (S. 75/76) taten, die Reibungswiderstände des Generators als im Antriebsmotor auftretend ansehen, also wie dort gewissermaßen die Lager und den ganzen Ankerkörper des Generators mit zum Antriebsmotor rechnen, so daß die Grenze zwischen beiden Maschinen (die Kupplung) zwischen dem Ankereisen und den Ankerleitern liegt. Alle jene Umstände bewirken, daß das so definierte Drehmoment M mit zunehmender Drehzahl etwas abnimmt; wir haben unseren Betrachtungen also eine ein wenig abfallende mechanische Charakteristik $M(\Omega)$ des Antriebsmotors zugrunde zu legen.

Die elektrische Charakteristik des mit konstantem Drehmoment angetriebenen Hauptstromgenerators ist bei Vernachlässigung der Reibungsmomente usw. eine senkrechte Gerade, weil J konstant ist. Durch die Reibung wird sie insofern modifiziert, als mit zunehmendem Ω das Drehmoment M und damit auch J abnimmt; da die EMK. des Generators (E) proportional Ω ist, muß J auch mit zunehmendem E etwas abnehmen, so daß die statische elektrische Charakteristik des Generators etwa wie in Fig. 54 verläuft.

Wenn nun auch danach der Strom J nicht ganz konstant ist, so ist trotzdem der Name: „System mit konstantem Strom" berechtigt, ebenso wie man die gewöhnlichen Verteilungssysteme (Nebenschlußgeneratoren konstanter Umlaufszahl) trotz des Spannungsabfalles bei Stromentnahme als Systeme mit konstanter Spannung bezeichnet; die Stromabnahme bei steigender Spannung, d. h. bei steigender Belastung, spielt eben hier keine größere Rolle als der Spannungsabfall dort. (Man könnte übrigens diesen „Stromabfall" durch eine Nebenschlußwicklung kompensieren, ebenso

wie man dort den Spannungsabfall durch eine Serienwicklung „compoundiert“.)

Wendet man auf die statische elektrische Charakteristik des so angetriebenen Generators (Fig. 54) das einfache elektrische Stabilitätskriterium (Kriterium A) an, so sieht man, daß hier stets Stabilität zu erwarten wäre, abgesehen von dem unwahrscheinlichen Ausnahmefall, daß die Verbrauchercharakteristik in dem schraffierten Winkelraum liegt. Das Bernsteinsche Verteilungssystem müßte sich daher vorzüglich zur Speisung von Bogenlampen eignen, da ein Stabilisierungs-(Beruhigungs-) Widerstand fortfallen könnte.

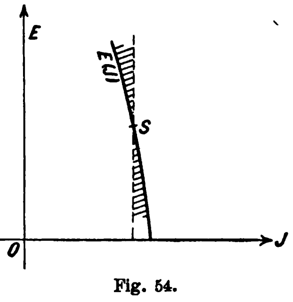


Fig. 54.

Wegen der Trägheit des Generators und seines Antriebsmotors ist aber die Anwendung des Kriteriums A hier nicht zulässig; die wirkliche (dynamische) Charakteristik des Generators stimmt nicht mit der in Fig. 54 gezeichneten statischen überein. Die Stabilitätsuntersuchung hat vielmehr folgendermaßen zu erfolgen:

Statt der Gleichung (1) ist die Bewegungsgleichung des Aggregats Antriebsmotor-Generator hinzuschreiben:

$$\Theta \frac{d\Omega}{dt} + JH(J) = M(\Omega). \tag{2}$$

(Θ ist das Trägheitsmoment des Aggregats). Außerdem gilt für den elektrischen Kreis (Fig. 55) die Differentialgleichung:

$$e(J) = E(J, \Omega) - L\frac{dJ}{dt}, \tag{3}$$

Fig. 55.

worin L die Selbstinduktion des ganzen Kreises und $e(J)$ die vom Strom abhängige Klemmenspannung des Verbrauchers ist, die wir uns durch eine Charakteristik gegeben denken. Ferner ist

$$E(J, \Omega) = \Omega H(J) - JW \tag{4}$$

die Klemmenspannung des Generators ($\Omega H(J)$ ist seine EMK., wie es in § 13 schon benutzt wurde, JW der durch seinen inneren Widerstand W hervorgerufene innere Spannungsabfall.

Leitet man aus Gleichung (2) und (3) in der bekannten Weise die Differentialgleichungen für kleine Abweichungen J_1, Ω_1 der Variablen von ihren Gleichgewichtswerten J_0, Ω_0 ab, so erhält man:

$$\Theta \frac{d\Omega_1}{dt} + J_0 H'(J_0) J_1 + H(J_0) \cdot J_1 = \Omega_1 \cdot M'(\Omega_0), \tag{5}$$

$$J_1 e'(J_0) = J_1 \frac{\partial E}{\partial J} + \Omega_1 \frac{\partial E}{\partial \Omega} - L \frac{dJ_1}{dt}. \tag{6}$$

In Gleichung (6) setzen wir für die partielle Ableitung von E nach Ω aus Gleichung (4) ein:

$$\frac{\partial E}{\partial \Omega} = H(J_0).$$

Den Ausdruck für $\frac{\partial E}{\partial J}$ wollen wir nicht erst aus Gleichung (4) einsetzen, weil $\frac{\partial E}{\partial J}$ selbst eine einfache physikalische Bedeutung hat; es ist nämlich gleich dem Anstieg der Generatorcharakteristik, die man bei konstant gehaltener Drehzahl Ω erhält. Wir können deshalb, wie im vorigen Paragraphen, auch schreiben: $\frac{\partial E}{\partial J} = E'(J_0)$, müssen aber immer im Auge behalten, daß dieses E' nicht etwa den Anstieg der statischen Generatorcharakteristik, wie sie in Fig. 54 gezeichnet ist, bedeutet.

Dann schreibt sich Gl. (6):

$$J_1 (e' - E') + L \frac{dJ_1}{dt} = \Omega_1 H(J_0). \tag{6a}$$

Aus den beiden simultanen Gleichungen (5) und (6a) eliminieren wir eine der Variablen, z. B. Ω_1; wir erhalten:

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + \left\{ \frac{e' - E'}{L} - \frac{M'}{\Theta} \right\} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{H(J_0 H' + H) - M'(e' - E')}{\Theta L} J_1 = 0 \tag{7}$$

als Differentialgleichung für den Ausgleich einer kleinen Gleichgewichtsstörung J_1. Zur Stabilität ist, wie früher gezeigt, erforderlich, daß die Koeffizienten a_1 und a_2 von $\frac{dJ_1}{dt}$ und J_1 positiv sind; daher lauten die Stabilitätsbedingungen:

$$a_1 = \frac{e' - E'}{L} - \frac{M'}{\Theta} > 0, \tag{8}$$

$$a_2 = \frac{H(H + J_0 H') - M'(e' - E')}{\Theta L} > 0. \tag{9}$$

Diese Stabilitätsbedingungen haben auffallende Ähnlichkeit mit den in § 13 erhaltenen Gleichungen (12) und (13). Das ist auch nicht verwunderlich, weil das hier betrachtete System sozusagen die Umkehrung des dortigen ist: dort speiste ein Hauptstromgenerator, dessen Umlaufzahl konstant war, d. h. einfach ein Generator mit gegebener Charakteristik, einen Hauptstrommotor, der eine Arbeitsmaschine mit gegebener mechanischer Charakteristik antrieb. Um aus dieser Anordnung die hier betrachtete zu erhalten, brauchen wir nur die Richtung des Energiestromes umzukehren, d. h. die Arbeitsmaschine durch einen Antriebsmotor, den elektrischen Generator durch einen Verbraucher zu ersetzen, und den Motor als Generator zu betreiben. Daher müssen in beiden Fällen dieselben Gleichungen gelten; nur ist, entsprechend der umgekehrten Richtung des Energiestromes, das Vorzeichen von J und Ω umzukehren, während m, e und E ihr Vorzeichen behalten; dementsprechend ist m' zu ersetzen durch $-M'$, e' durch $-E'$ und E' durch $-e'$. Führt man diese Substitution in den Gleichungen (12) und (13) des § 13 durch, so erhält man tatsächlich unsere jetzigen Stabilitätsbedingungen (8) und (9).

Diskussion der Stabilitätsbedingungen:

Wir betrachten zunächst den Idealfall, daß J_0 und damit M wirklich konstant, also $M'(\Omega_0)=0$ sei. Dann ist Bedingung (9) stets erfüllt, weil der Ausdruck $H(H+J_0H')$ aus demselben Grunde wie in § 13 stets positiv ist. Bedingung (8) ist dagegen nur erfüllt, wenn

$$e'-E'>0 \tag{10}$$

ist.

Daran wird auch durch die in Wirklichkeit stattfindende Abnahme des Drehmomentes M mit zunehmender Drehzahl Ω nicht viel geändert. M' hat dann einen kleinen negativen Betrag. Gleichung (8) ergibt dann, daß $e'-E'$ zwar negativ werden kann, ohne die Stabilität zu gefährden, daß dieser negative Betrag aber höchstens gleich der kleinen Größe $L\frac{M'}{\Theta}$ werden kann, die praktisch nicht in Betracht kommt. Daß das wirklich so ist, übersieht man am besten, wenn man Gleichung (8) in der Form der Gleichung (12a) des § 13 (S. 154) schreibt:

$$\frac{e'-E'}{\left(\frac{e}{J_0}\right)} > \frac{1}{v}\frac{M'}{\left(\frac{M}{\Omega_0}\right)}. \tag{8a}$$

Dann steht rechts der „spezifische Anstieg" der mechanischen Charakteristik M, der an sich klein ist, dividiert durch das Verhältnis v zwischen kinetischer und magnetischen Energie, das nach § 13 (Anm. zu S. 154) die Größenordnung 50 bis 100 hat. Die rechte Seite von Gleichung (8a) ist daher vollkommen zu vernachlässigen.

Wenn Gleichung (8) erfüllt ist, wird in Gleichung (9) der zweite Term: $-M'(e'-E')$, da M' negativ ist, im allgemeinen positiv; dann ist Gleichung (9), wie vorhin, ohne weiteres erfüllt. Und auch wenn $(e'-E')$ einen der durch Gleichung (8) noch zugelassenen kleinen negativen Werte besitzt, bleibt sie erfüllt, weil dann der zweite Term $-M'(e'-E')$ sehr klein gegen den ersten: $H(H+J_0H')$ ist.

Das Resultat ist also, daß auch bei schwach abfallender Charakteristik $M(\Omega)$ praktisch die einzige Stabilitätsbedingung gilt:

$$e'-E'>0, \tag{10}$$

d. h. es müssen die beiden elektrischen Charakteristiken e und E (letztere für konstantes Ω gezeichnet) dem elektrischen Stabilitätskriterium A genügen; es muß also die Charakteristik des Verbrauchers steiler ansteigen als die des Generators. Die Stabilitätsbedingung ist genau dieselbe, als ob die Drehzahl des Generators konstant gehalten würde.

Da die Generatorcharakteristik im allgemeinen ansteigt (wenigstens bei normalen Maschinen, und solange sie mit befriedigendem Wirkungsgrad arbeiten), muß die Verbrauchercharakteristik ebenfalls ansteigen. Speist die Maschine z. B. Bogenlampen, so ist, um diesen Anstieg zu erreichen, in die Leitung ein beträchtlicher Widerstand einzuschalten, der größer sein muß, als wenn die Lampen aus einem Netz konstanter Spannung gespeist würden. Bei Glühlampen ist dagegen ein stabiler Betrieb möglich, bei Kohlenfadenlampen allerdings nur bei genügender Sättigung des Magneteisens (denn bei diesen steigt die Charakteristik schwächer als linear an).

Gleichung (7) läßt einen weiteren Nachteil des ganzen Systems erkennen: da Gleichung (9) stets erfüllt ist, führt die Lösung der Gleichung (7) auf Schwingungen, d. h. nach einer Störung (z. B. Änderung der Zahl der eingeschalteten Lampen) erreicht das System nicht sofort den Gleichgewichtszustand, sondern schwingt

darüber hinaus; das Gleichgewicht wird erst nach einigen Pendelungen erreicht. Für befriedigenden Betrieb muß verlangt werden, daß diese Schwingungen womöglich aperiodisch gedämpft sind. Die Bedingung dafür ist nach § 3 (S. 26):

$$a_2 - \frac{a_1^{\,2}}{4} = \frac{H(H + J_0 H')}{\Theta L} - \frac{1}{4}\left(\frac{e' - E'}{L} + \frac{M'}{\Theta}\right)^2 \leqq 0,$$

oder:

$$e' - E' \geqq - M' \frac{L}{\Theta} + 2\sqrt{\frac{L}{\Theta} H(H + J_0 H')}. \tag{11}$$

Da stets $M' < 0$ ist, so ist die rechte Seite von Gl. (11) stets positiv; Bedingung (11) verlangt also mehr als Gl. (10), sie verlangt, daß die Verbrauchercharakteristik wesentlich steiler ansteigt als die Generatorcharakteristik. Will man z. B. bei Speisung von Bogenlampen durch ein Bernsteinsches Verteilungssystem aperiodische Einstellung des Gleichgewichtes nach einer Störung erreichen, so muß man einen noch größeren Vorschaltwiderstand verwenden als Gl. (10) entspricht; in Bezug auf den Wirkungsgrad stellt sich dann die Bernsteinsche Anordnung gegenüber den gewöhnlichen Verteilungssystemen noch ungünstiger. Da der erste Term $\left(-M' \frac{L}{\Theta}\right)$ auf der rechten Seite von Gl. (11) stets positiv ist, kann zur Erfüllung von Gl. (11) der Unterschied in der Größe der Anstiege e' und E' um so kleiner sein, je kleiner L und je größer Θ ist; kleines L und großes Θ (Schwungrad) sind also für die Unterdrückung der Pendelungen günstig.

Dieses Auftreten von Pendelungen bei Belastungsänderungen, sowie die Neigung zur Labilität sind wohl mit ein Grund, weshalb Bernstein sowohl wie Thury noch besondere Regulierapparate an ihren Antriebsmaschinen anbringen, welche die Konstanthaltung des Stromes besorgen.

Einfluß von Wirbelströmen.

Es wurde oben bemerkt, daß zur Unterdrückung von Pendelungen bei Belastungsänderungen kleine Selbstinduktion L günstig ist (Gleichung 11). Nun gilt für stationäre Wechselströme der Satz, daß die Selbstinduktion einer Spule durch Wirbelströme, die ihr Magnetfeld in benachbarten Leitern erzeugt, verkleinert wird; man könnte daher auf den Gedanken kommen, daß die Wirbel-

ströme im massiven Eisen des Generators günstig wirken müßten und könnte versuchen, diese Wirkung durch eine besondere kurz geschlossene Wicklung zu erhöhen. Diese Schlußweise ist aber deshalb nicht richtig, weil die Wirbelströme die Verhältnisse noch in anderer Weise ändern, indem sie die Phase des Magnetfeldes gegen die des Stromes verschieben; vielmehr muß man, um den wirklichen Einfluß der Wirbelströme zu finden, sie schon von vornherein in den Ausgangsdifferentialgleichungen berücksichtigen, und das wollen wir jetzt tun.

Wie im vorigen Paragraphen bemerkt, wirken die Wirbelströme genau so, als ob parallel zu der widerstandslos gedachten Feldwicklung ein Widerstand geschaltet wäre, so daß Fig. 55 durch das Schema der Fig. 56 zu ersetzen wäre. Bezeichnen wir

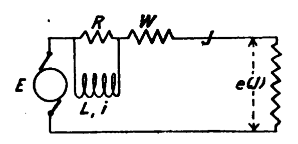


Fig. 56.

den Strom in der Feldwicklung (L) mit i, so fließt durch R der Strom $J - i$; es gelten dann unter Vernachlässigung der Selbstinduktion des Generatorankers und des Verbrauchers folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} e(J) &= \Omega H(i) - JW - (J-i)R, \\ L\frac{di}{dt} &= (J-i)R, \\ M(\Omega) &= \Theta\frac{d\Omega}{dt} + JH(i). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Stellt man hiernach die Differentialgleichung der kleinen Schwingungen auf (am einfachsten nach der Methode des § 4, wie sie in dem Beispiel § 14 angewandt wurde), so erhält man wieder eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2J_1}{dt^2} + a_1\frac{dJ_1}{dt} + a_2J_1 = 0 \qquad (7\text{b})$$

und für deren Koeffizienten folgende Ausdrücke:

$$a_1 = \frac{e' - E'}{L\left(1 + \frac{e' + W}{R}\right)} - \frac{M'}{\Theta} + \frac{H^2}{\Theta(e' + R + W)},$$

$$a_2 = \frac{H(H + J_0 H') - M'(e' - E')}{\Theta L\left(1 + \frac{e' + W}{R}\right)}.$$

Also lauten die Stabilitätsbedingungen, wenn man noch

$$L\left(1 + \frac{e' + W}{R}\right) = L_1 \tag{13}$$

setzt:

$$a_1 = \frac{e' - E'}{L_1} - \frac{M'}{\Theta} + \frac{L}{R}\frac{H^2}{\Theta L_1} > 0, \tag{8b}$$

$$a_2 = \frac{H(H + J_0 H') - M'(e' - E')}{\Theta L_1} > 0. \tag{9b}$$

Diese Bedingungen unterscheiden sich von denen, die wir früher ohne Berücksichtigung der Wirbelströme fanden [Gleichung (8) und (9)] einmal durch den Summanden $\frac{L}{R}\frac{H^2}{\Theta L_1}$ im Ausdruck für a_1, der stets positiv ist und daher die Stabilität erhöht, sonst aber nur dadurch, daß überall L_1 statt L steht. Wir können daher L_1 als scheinbare Selbstinduktion der Feldspule bezeichnen. Man sieht, daß infolge der Wirbelströme diese scheinbare Selbstinduktion L_1 von der wirklichen Selbstinduktion L in der Tat abweicht, daß diese Abweichung aber sowohl in einer Vergrößerung als auch in einer Verkleinerung bestehen kann, je nach Vorzeichen und Größe von e'. Denn e' kann jetzt auch — im Gegensatz zu vorhin — negativ sein, ohne daß Labilität eintritt, denn wegen des hinzugekommenen Summanden kann a_1 auch dann noch positiv bleiben. Gleichung (8b) würde unter Umständen sogar so große negative Werte von e' zulassen, daß L_1 negativ wird; dann würde aber Gleichung (9b) nicht mehr erfüllt sein, weil der Zähler von a_2, wie wir früher sahen, stets positiv ist. Wenn also die Charakteristik e abfällt, und zwar stärker abfällt, als dem Spannungsabfall im Generator entspricht ($e' < -W$), so darf R nicht beliebig klein sein, sondern, damit

$$L_1 > 0$$

ist, muß R der Gleichung genügen:

$$R + e' + W > 0. \tag{14}$$

Damit ist eine untere Grenze für R gegeben.

Im übrigen ist aber Kleinheit von R nur vorteilhaft, wenigstens bei nicht zu steilem Anstieg der Charakteristik $e(J)$. Denn mit

abnehmendem R wächst das positive Zusatzglied von a_1, während L_1 abnimmt (bei negativem $e' + W$), oder wenigstens nicht in gleichem Maße zunimmt. Somit wird bei kleinem R a_1 groß, d. h. die Schwingungen des Systems werden stark gedämpft.

Das Resultat der letzten Betrachtung ist also das, daß die Wirbelströme im massiven Eisen im allgemeinen günstig wirken, und daß man unter Umständen ein labiles System durch Verstärkung dieser Wirbelströme (Kurzschlußwicklung) zu einem stabilen machen kann.

B. Das Thurysche System.

Soweit über das Bernsteinsche System, dem heute keine praktische Bedeutung mehr zukommt. Wichtig ist dagegen das Thurysche System, das sich als Spezialfall des Bernsteinschen auffassen läßt; man erhält es aus letzterem, wenn man als Verbraucher Hauptstrommotore nimmt. Hier ist die bisherige Betrachtung nicht anwendbar, weil die dynamische elektrische Charakteristik der Motore wegen ihrer Trägheit ganz erheblich von der statischen abweicht. Hinzu kommt noch, daß die Thurymotore eines besonderen Regulators bedürfen, der ebenfalls die Stabilitätsverhältnisse ändert. Dieser Regulator ist deshalb notwendig, weil ein mit konstantem Strom gespeister Serienmotor ein konstantes Drehmoment entwickelt, unabhängig von der Drehzahl, mit der er läuft. Da in der Technik aber, je nach der Belastung, ein wechselndes Drehmoment, dagegen konstante Drehzahl verlangt wird, ist ein selbsttätiger Regulierapparat notwendig, der bei allen Belastungen das Drehmoment so einstellt, daß immer dieselbe Drehzahl erreicht wird (bei Thury geschieht das durch einen Zentrifugalregulator, der eine Verstellung der Bürsten bewirkt). Andrerseits sind auch die Antriebsmaschinen (Turbinen) der Generatoren mit selbsttätigen Regulierapparaten versehen, welche die Konstanthaltung des Stromes besorgen. Diese Regulierapparate beeinflussen die Stabilität; um die vollständigen Stabilitätsbedingungen des ganzen Systems zu finden, müßte man die Bewegungsgleichungen der Regulierapparate mit berücksichtigen und würde so zu sehr komplizierten Bedingungen gelangen. Wir wollen das nicht tun, sondern nur fragen, unter welchen Bedingungen das System ohne Regulierapparate stabil ist. Denn auch unabhängig von diesen muß Stabilität vorhanden sein, falls das System befriedigend arbeiten soll. Das ist deshalb nötig,

weil beim Thurysystem zur Regulierung Servomotore verwendet werden; d. h. der Zentrifugalregulator verstellt nicht direkt die Organe, welche das Drehmoment oder den Strom beeinflussen, sondern indirekt dadurch, daß er einen elektrischen oder hydraulischen Motor im einen oder anderen Sinne einschaltet, der die Verstellung bewirkt. Bei normalem Betrieb (konstanter Belastung) muß verlangt werden, daß dieser „Servomotor" ruht, und das ist nur dann möglich, wenn das System ohne Mitwirkung der Regulierapparate stabil ist; denn andernfalls wäre der Zustand des ruhenden Servomotors labil; der Motor würde abwechselnd vor- und rückwärts laufen und dementsprechend die Zustandsvariablen des Systems (Strom und Drehgeschwindigkeiten) fortdauernde Pendelungen ausführen, auch wenn der Reguliermechanismus noch so gut konstruiert wäre. Es ist dehalb ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium der Stabilität, daß auch die Stabilitätsbedingungen, die ohne Rücksicht auf Regulierapparate erhalten werden, erfüllt sind.

Zur Ableitung dieser Stabilitätsbedingungen sind die Differentialgleichungen des Systems aufzustellen. Die Wirbelströme vernachlässigen wir; dann gelten hier wieder die Gleichungen (2) und (3) dieses Paragraphen, nur hängt jetzt in Gleichung (3) die Klemmenspannung des Verbrauchers (Motors) nicht mehr vom Strom J allein, sondern auch noch von der Drehgeschwindigkeit ω des Motors ab nach der Gleichung:

$$e(J,\omega) = \omega h(J) + Jw, \tag{15}$$

die das Analogon zur Gleichung (4) bildet und in der $h(J)$ und w Magnetfeld und inneren Widerstand des Motors bedeuten [$h(J)$ im selben Maße gemessen wie $H(J)$ beim Generator]. Die Selbstinduktion des Motors rechnen wir mit zu der des Generators hinzu. Außer Gleichung (2) und (3) gilt noch die Bewegungsgleichung des Motors:

$$\vartheta \frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = J h(J),$$

worin ϑ sein Trägheitsmoment (einschl. desjenigen der von ihm getriebenen Arbeitsmaschine) und $m(\omega)$ das Bremsmoment der Arbeitsmaschine ist. Die den Gleichungen (1) des § 4 entsprechenden Grundgleichungen des Systems lauten demnach hier:

$$\left.\begin{aligned} e(J,\omega) - E(J,\Omega) + L\frac{dJ}{dt} = F_1 = 0, \\ \Theta\frac{d\Omega}{dt} - M(\Omega) + J\cdot H(J) = F_2 = 0, \\ \vartheta\frac{d\omega}{dt} + m(\omega) - Jh(J) = F_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Wendet man auf diese Gleichungen das Verfahren des § 4 an in der Weise, wie es an dem Beispiel § 14 gezeigt wurde, so erhält man für die charakteristische Gleichung, die zur Differentialgleichung der kleinen Schwingungen gehört, eine Gleichung dritten Grades mit den Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{e' - E'}{L} - \frac{M'}{\Theta} + \frac{m'}{\vartheta}, \\ a_2 &= \frac{H(H + J_0 H') - M'(e' - E')}{\Theta L} + \frac{h(h + J_0 h') + m'(e' - E')}{\vartheta L} - \\ &\qquad - \frac{M'}{\Theta}\frac{m'}{\vartheta}, \\ a_3 &= \frac{m'}{\vartheta}\frac{H(H + J_0 H')}{\Theta L} - \frac{M'}{\Theta}\frac{h(h + J_0 h')}{\vartheta L} - \frac{M'}{\Theta}\frac{m'}{\vartheta}\frac{e' - E'}{L}. \end{aligned}\right\} (17)$$

Die **Stabilitätsbedingungen** lauten wieder:

$$a_1 > 0, \quad (18\text{a})$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad (18\text{b})$$

$$a_3 > 0. \quad (18\text{c})$$

Die Besprechung dieser Bedingungen wollen wir auf den Fall beschränken, daß Generator und Motor gleiche Maschinen sind, so daß $H = h$ und $H' = h'$ ist; ferner soll $\Theta = \vartheta$ sein. Dann ergibt sich aus Gl. (4) und (15):

$$e' - E' = (\omega_0 - \Omega_0) H' + w + W,$$

oder, nach Einsetzung des Wertes für $\omega_0 - \Omega_0$, der sich aus der Gleichgewichtsbedingung $e = E$ berechnet:

$$e' - E' = (w + W)\left(1 - \frac{H'}{H/J_0}\right),$$

woraus, da $\frac{H'}{H/J_0}$ höchstens gleich 1 ist, folgt, daß $e' - E'$ stets

positiv ist. Ferner zeigt sich, daß $M'(e'-E')$ stets klein gegen $H(H+J_0 H')$ ist; daher können wir statt Bedingung (18c) annähernd schreiben:

$$m'-M'>0. \tag{19}$$

Mit dieser Bedingung ist gleichzeitig auch stets Bedingung (18a) erfüllt, und ebenso Bedingung (18b), denn deren linke Seite läßt sich leicht auf die Form bringen:

$$a_1 a_2 - a_3 = \frac{e'-E'}{L}\frac{m'-M'}{\Theta}\left(\frac{e'-E'}{L}+\frac{m'-M'}{\Theta}\right)+$$
$$+2\frac{H(H+J_0H')}{\Theta L}\frac{e'-E'}{L}+\frac{m'-M'}{\Theta}\left(\frac{H(H+J_0H')}{\Theta L}+\frac{M'm'}{\Theta^2}\right),$$

in welcher sie, da $\frac{M'm'}{\Theta^2}$ stets klein gegen $\frac{H(H+J_0H')}{\Theta L}$ ist, nur die positiven Größen $\frac{e'-E'}{L}$, $\frac{m'-M'}{\Theta}$ und $\frac{H(H+J_0H')}{\Theta L}$ enthält, also selbst stets positiv sein muß.

Sonach reduzieren sich in dem betrachteten Spezialfall die drei Stabilitätsbedingungen auf eine einzige (Gl. 19), nämlich das einfache mechanische Stabilitätskriterium (Kriterium B, § 8); in Bezug auf die Stabilität verhält sich also unser System genau so, als ob der Antriebsmotor des Generators und die vom Elektromotor angetriebene Arbeitsmaschine nicht durch die elektrischen Maschinen, sondern direkt miteinander gekuppelt wären. Jedenfalls ist, da der absolute Betrag von M' stets klein ist, zur Stabilität einer Kraftübertragungsanlage nach Thury unbedingt positives m', d. h. ansteigende mechanische Charakteristik der Arbeitsmaschine erforderlich.

§ 16. Labilität und Pendelungen bei Wendepolmotoren.

A. Problemstellung. Wir wenden uns zurück zu einer Frage, die wir in § 9 C anschnitten, wie sich ein Motor mit sehr steil ansteigender mechanischer Charakteristik, speziell ein Gleichstrom-Nebenschlußmotor mit starker Ankerrückwirkung und geringem Ankerwiderstande, verhält. Wir hatten dort gefunden, daß die Anwendung des einfachen mechanischen Stabilitätskriteriums auf Widersprüche mit der Erfahrung führt und die Vermutung ausgesprochen, daß die Ursache dieses Widerspruchs in der Ab-

weichung der dynamischen mechanischen Charakteristik des Motors von der statischen zu suchen sei.

In der Tat läßt sich, wie wir sehen werden, auf diesem Wege das Verhalten jener Motore erklären. Die Abweichung zwischen dynamischer und statischer Motorcharakteristik wird hier hervorgerufen durch die Selbstinduktion des Motorankers; sie bewirkt, daß der Motorstrom, der das Drehmoment erzeugt, bei einer Zustandsänderung nicht momentan den der Drehgeschwindigkeit entsprechenden Wert annimmt, sondern ihr gegenüber eine Phasenverzögerung erleidet. Unter Berücksichtigung dieser Selbstinduktion hat K. W. Wagner[1]) die Stabilität von Gleichstromnebenschlußmotoren, insbesondere solcher mit Wendepolen, bei denen eine ansteigende mechanische Charakteristik besonders leicht vorkommt, untersucht; er beschränkt sich dabei auf den Fall, daß das Drehmoment m der von dem Motor angetriebenen Arbeitsmaschine unabhängig von der Drehzahl ω ist. Im folgenden seien die Wagnerschen Überlegungen in einer unserer bisherigen Betrachtungsweise angepaßten Form mitgeteilt; gleichzeitig wollen wir sie erweitern auf den Fall, daß das Bremsmoment m der Arbeitsmaschine durch eine beliebige mechanische Charakteristik $m(\omega)$ als Funktion der Drehzahl gegeben sei.

B. Ableitung der Stabilitätsbedingungen. Wir nehmen also an, ein Gleichstromnebenschlußmotor sei an eine konstante Netzspannung E_0 angeschlossen; die Winkelgeschwindigkeit des Ankers sei ω, er sei belastet mit einer Arbeitsmaschine mit der Charakteristik $m(\omega)$. Das infolge von Reibung, Hysteresis und Wirbelströmen im Motor selbst auftretende Bremsmoment rechnen wir, wie früher (S. 81), zum Bremsmoment m der Arbeitsmaschine hinzu. In dem Motoranker wird bei der Rotation eine EMK. e_i induziert, die proportional der Drehgeschwindigkeit ω ist:

$$e_i = \omega h,$$

wobei, wie früher erörtert, der Proportionalitätsfaktor h proportional dem magnetischen Induktionsflusse ist, der von den Feldwindungen erzeugt wird. Der Erregerstrom dieses Magnetfeldes ist wegen der konstanten Netzspannung E_0 konstant; das Magnetfeld und damit h kann aber noch vom Ankerstrom J[2]) abhängen (Ankerrückwirkung); es ist also

1) K. W. Wagner, Elektrot. ZS. 28, S. 286—289, 1907.

2) Wegen der unter Umständen vorhandenen Abhängigkeit des h von ω vgl. unten (Schluß von Abschnitt Hb).

$$e_i = \omega h = \omega h(J). \tag{1}$$

Derselbe Proportionalitätsfaktor $h(J)$ ergibt, mit dem Strome J multipliziert, das vom Motor ausgeübte Drehmoment:

$$M = J \cdot h(J); \tag{2}$$

diese Beziehung folgt aus dem Energieprinzip, wie oben (S. 76, Gl. (4)) für die h entsprechende Konstante a abgeleitet wurde. Im übrigen bedeuten:

Θ das Trägheitsmoment des ganzen Aggregats
W den Widerstand } des Motorankers einschließlich etwa
L die Selbstinduktion } vorhandener Hauptstromwicklungen.

Wir wollen nach den in § 4 abgeleiteten Regeln die Stabilität des so gekennzeichneten Systems untersuchen. Die Gleichungen, welche das System beherrschen, sind:

Die Gleichung der Spannungen:

$$E_0 = e_i + JW + L\frac{dJ}{dt} = \omega h(J) + JW + L\frac{dJ}{dt} \tag{3}$$

und die Gleichung der Drehmomente:

$$\Theta\frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = M = J \cdot h(J). \tag{4}$$

Aus diesen beiden Gleichungen gelangen wir zu den Stabilitätsbedingungen, indem wir aus ihnen zunächst die Gleichungen für den Fall des Gleichgewichts $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$ bilden:

$$E_0 = \omega_0 h(J_0) + J_0 W, \tag{3a}$$

$$m(\omega_0) = J_0 h(J_0). \tag{4a}$$

Gleichung (3a) gestattet beiläufig, die Funktion $h(J_0)$ bei einem fertigen Motor experimentell zu bestimmen; nach ihr ist

$$h(J_0) = \frac{E_0 - J_0 W}{\omega_0}; \tag{3a'}$$

h läßt sich also bestimmen, indem man bei konstanter Netzspannung E_0 und verschiedenen Belastungen im Gleichgewichtszustande die Winkelgeschwindigkeit ω_0 als Funktion des aufgenommenen Stromes J_0 mißt.

Sodann sind wieder die Differentialgleichungen für kleine Abweichungen ω_1 und J_1 vom Gleichgewichtszustande aufzustellen; man findet in bekannter Weise:

$$0 = \omega_1 \cdot h + J_1 (\omega_0 h' + W) + \frac{d J_1}{dt} \cdot L, \tag{3b}$$

$$\Theta \frac{d \omega_1}{dt} + \omega_1 \cdot m' = J_1 (h + J_0 h'), \tag{4b}$$

woraus man durch Elimination von J_1 erhält:

$$\frac{d^2 \omega_1}{dt^2} + \left(\frac{m'}{\Theta} + \frac{\omega_0 h' + W}{L}\right) \frac{d \omega_1}{dt}$$

$$+ \frac{h(h + J_0 h') + m'(\omega_0 h' + W)}{\Theta L} \omega_1 = 0 \tag{5}$$

als Differentialgleichung für den Ausgleich einer kleinen Gleichgewichtsstörung. Bedingung dafür, daß der Zustand stabil ist, ist wieder (§ 4, Gl. (16)), daß die Koeffizienten a_1 und a_2 von $\frac{d\omega_1}{dt}$ und ω_1 positiv sind; demnach lauten die Stabilitätsbedingungen:

$$a_1 = \frac{m'}{\Theta} + \frac{\omega_0 h' + W}{L} > 0 \tag{6}$$

und

$$a_2 = \frac{h(h + J_0 h') + m'(\omega_0 h' + W)}{\Theta L} > 0. \tag{7}$$

Bevor wir zur Diskussion der Stabilitätsbedingungen (6) und (7) übergehen, wollen wir sie in eine übersichtlichere Form bringen. Zunächst bemerkt man, daß man den in beiden Gleichungen vorkommenden Ausdruck $\omega_0 h' + W$ erhält, wenn man Gleichung (3a) partiell nach J_0 differenziert:

$$\frac{\partial E_0}{\partial J_0} = \omega_0 h' + W. \tag{8}$$

Nun hatten wir allerdings bisher E_0 als Konstante definiert; nach dieser Definition hätte Gleichung (8) keinen Sinn. Um ihr physikalischen Sinn beizulegen, müssen wir E_0 als variabel, als Funktion von J_0 und ω_0 betrachten; dann bedeutet E_0 denjenigen Wert, den die Ankerspannung haben muß, damit der Motor bei dem Strome J_0 gerade die Umdrehungszahl ω_0 annimmt. Daher gibt der Differentialquotient $\frac{\partial E_0}{\partial J_0}$ den Betrag an, um den bei einer

Mehrbelastung, die einer Zunahme des Motorstromes von 1 Ampere entspricht, die Ankerspannung erhöht werden muß, damit der Motor seine Drehzahl ω_0 unverändert beibehält. Wir können auch E_0 als Funktion von J_0 allein betrachten; $E_0(J_0)$ ist dann einfach die elektrische Charakteristik, die der Motor besitzt, wenn man seine Drehzahl und Erregerstrom zwangsweise konstant hält; der Differentialquotient $\frac{\partial E_0}{\partial J_0}$ wird dann gleich dem Anstieg dieser Charakteristik und zweckmäßig mit $E_0'(J_0)$ bezeichnet. Es ist also

$$\omega_0 h' + W = E_0'. \tag{8a}$$

Ferner wollen wir die statische mechanische Charakteristik des Motors betrachten, d. h. diejenige Kurve, welche das im Gleichgewichtszustande vom Motor ausgeübte Drehmoment M_0 als Funktion der stationären Drehzahl ω_0 darstellt. Durch Gl. (2) ist M_0 zunächst als Funktion von J bzw. J_0 gegeben; bei Gleichgewicht hängt J_0 mit ω_0 durch Gleichung (3a) eindeutig zusammen; man erhält also die gesuchte Charakteristik $M_0(\omega_0)$, wenn man aus Gleichung (3a) J_0 als Funktion von ω_0 explizite ausrechnet und dieses J_0 an Stelle von J in Gleichung (2) einsetzt. Diese Ausrechnung kann im allgemeinen nur graphisch ausgeführt werden. Dagegen läßt sich der Anstieg $M_0'(\omega_0)$ der Charakteristik $M_0(\omega_0)$ leicht analytisch berechnen. Es ist nämlich:

$$M'_0(\omega_0) = \frac{dM_0}{d\omega_0} = \frac{dM_0}{dJ_0} \cdot \frac{dJ_0}{d\omega_0}.$$

Nach Gleichung (2) ist

$$\frac{dM_0}{dJ_0} = \frac{dM}{dJ} = h + J_0 h',$$

während Differentiation von Gleichung (3a)[1] nach ω_0 ergibt:

$$0 = h + (\omega_0 h' + W) \frac{dJ_0}{d\omega_0},$$

also

$$\frac{dJ_0}{d\omega_0} = -\frac{h}{\omega_0 h' + W}.$$

---

1) E_0 ist jetzt, im Gegensatz zu vorhin (Gl. (8)), wieder als konstant zu betrachten.

Somit wird

$$M_0'(\omega_0) = -\frac{h(h + J_0 h')}{\omega_0 h' + W} = -\frac{h(h + J_0 h')}{E_0'}. \tag{9}$$

Mit Benutzung der Hilfsgleichungen (8) bzw. (8a) und (9) lassen sich die beiden Stabilitätsbedingungen (6) und (7) schreiben:

$$a_1 = \frac{m'}{\Theta} + \frac{E_0'}{L} > 0, \tag{6a}$$

$$a_2 = \frac{E_0'(m' - M_0')}{\Theta L} > 0. \tag{7a}$$

C. Diskussion der Stabilitätsbedingungen. Wir fangen mit der zweiten Bedingung (Gl. 7a)) an, die wegen des Ausdrucks $(m' - M_0')$, den sie enthält, eine gewisse Beziehung zu unserem einfachen mechanischen Stabilitätskriterium (Kriterium B, § 8) erwarten läßt. Zunächst ist zu bemerken, daß bei Nichterfüllung dieser Stabilitätsbedingung, d. h. bei negativem a_2, „Labilität 1. Art" zu erwarten ist; d. h. die Labilität muß eine derartige sein, daß sich das System nach einer Störung aperiodisch immer weiter vom Gleichgewichtszustande entfernt. Sodann ist folgendes zu sagen über den Zusammenhang von E_0' und M_0': Dieser Zusammenhang ist durch Gleichung (9) gegeben. Der Zähler der rechten Seite dieser Gleichung $h(h + J_0 h')$ ist stets positiv, allerdings bei negativem h' nur unterhalb eines gewissen Maximalwertes des Stromes J_0, nämlich des Stromes, für den $h(h + J_0 h') = 0$ wird. Dieser Grenzwert wird jedoch praktisch nie erreicht; denn für ihn müßte nach Gleichung (9) i. allg. auch $M_0' = 0$ werden und bei noch größeren Strömen sein Zeichen wechseln; das heißt aber, das vom Motor ausgeübte Drehmoment müßte für diesen Wert des Stromes ein Maximum haben, und das kommt bei praktisch ausgeführten Motoren nicht vor. Außerdem läßt sich leicht zeigen, daß jenseits dieses Maximums der mechanischen Charakteristik des Motors der Betriebszustand stets labil sein müßte, falls nicht ein sehr großer Vorschaltwiderstand vor den Anker gelegt würde, der mindestens die Hälfte der aufgewandten Leistung verzehrte.

Wir können also, wenn wir uns auf normale Betriebszustände (d. h. Punkte diesseits des Maximums der mechanischen Motorcharakteristik) beschränken, sagen, daß stets

$$h \cdot (h + J_0 h') > 0$$

ist; dann folgt aus Gleichung (9), daß M_0' stets entgegengesetztes Vorzeichen hat wie E_0'.

Da Θ und L stets positiv sind, läßt sich demnach die Stabilitätsbedingung (7a) folgendermaßen schreiben. Es muß sein:

$$\left.\begin{array}{l} m' - M_0' > 0, \text{ falls } E_0' > 0 \text{ oder } M_0' < 0 \\ \text{(Kriterium B), und} \\ m' - M_0' < 0, \text{ falls } E_0' < 0 \text{ oder } M_0' > 0 \\ \text{(umgekehrtes Kriterium B).} \end{array}\right\} \quad (7\,b)$$

Die zweite unserer beiden Stabilitätsbedingungen (Gl. (7a)) ist also bei abfallender mechanischer Motorcharakteristik identisch mit dem einfachen mechanischen Stabilitätskriterium B, während sie bei ansteigender Motorcharakteristik verlangt, daß dieses Kriterium gerade nicht erfüllt ist. Die Stabilitätsbedingung (7b) ist identisch mit den Bedingungen (13a) und (13b) des § 13 (S. 150); infolgedessen sind die Figg. 51a und 51b, die jene Bedingungen erläuterten, auch geeignet, die vorliegende Stabilitätsbedingung zu illustrieren: schraffiert man im Charakteristikendiagramm denjenigen Winkelraum, innerhalb dessen nach Bedingung (7b) bei gegebener mechanischer Motorcharakteristik M_0 die Charakteristik m der Arbeitsmaschine in der Nähe des Schnittpunktes S nicht verlaufen darf, so erhält man bei abfallendem M_0 die Fig. 51a, bei ansteigendem M_0 Fig. 51b. Da auch im vorliegenden Falle bei praktisch ausgeführten Motoren die Charakteristik $M_0(\omega_0)$ stets sehr steil verläuft, so können wir auch das Resultat der in § 13 im Anschluß an die dort erhaltenen Stabilitätsbedingungen (13) angestellten Überlegung (S. 151) übernehmen: Stabilitätsbedingung (7) ist, abgesehen von Ausnahmefällen, praktisch stets erfüllt; unter den Ausnahmefällen hat praktische Bedeutung im wesentlichen nur der Fall, daß der Motor ansteigende mechanische Charakteristik hat, und die von ihm angetriebene Arbeitsmaschine ein Gleichstrom-Nebenschlußgenerator ist, der eine Akkumulatorenbatterie von sehr geringem Widerstande auflädt[1]).

---

1) Natürlich läßt sich Bedingung (7a) auch in eine Form bringen, in der die Anstiege der statischen elektrischen Charakteristiken an Stelle derjenigen der statischen mechanischen Charakteristiken vorkommen, ähnlich wie es auf S. 152 für die Bedingung (13) des § 13 ausgeführt wurde; die An-

Die andere Stabilitätsbedingung (Gl. (6a)) lautete

$$\frac{m'}{\Theta} + \frac{E_0'}{L} > 0. \qquad (6a)$$

Wenn sie nicht erfüllt ist, wenn also a_1 negativ ist, muß sich die Labilität in Form von Pendelungen äußern, deren Amplitude ständig wächst, und derartige Labilitätserscheinungen sind in der Tat häufig in der Praxis beobachtet worden[1]. Bedingung (6a) hat wieder große Ähnlichkeit mit der ihr entsprechenden Bedingung (12) des § 13; sie läßt infolgedessen auch dieselbe Umformung zu, die wir dort mit jener vornahmen: Dividiert man Gleichung (6a) auf beiden Seiten durch die bei Gleichgewicht auf die Arbeitsmaschine übertragene Leistung:

$$m_0 \omega_0 = \eta E_0 J_0$$

(η ist der elektrische Wirkungsgrad des Motorankers), so geht sie über in:

$$\frac{m'}{\left(\frac{m_0}{\omega_0}\right) \Theta \omega_0^2} + \frac{E_0'}{\eta \left(\frac{E_0}{J_0}\right) L J_0^2} > 0$$

oder

$$\frac{\eta}{v} \cdot \frac{m'}{\left(\frac{m_0}{\omega_0}\right)} + \frac{E_0'}{\left(\frac{E_0}{J_0}\right)} > 0, \qquad (6b)$$

worin v wie in § 10 und § 13 wieder das Verhältnis der aufgespeicherten mechanisch-kinetischen Energie zur magnetischen Energie bedeutet:

$$v = \frac{\frac{1}{2} \Theta \omega_0^2}{\frac{1}{2} L J_0^2}.$$

In dieser Form enthält die Stabilitätsbedingung nur Größen, deren Betrag für eine bestimmte Maschinentype unter sonst gleichen Verhältnissen konstant, unabhängig von der Einzelausführung

---

wendung der Stabilitätsbedingung in dieser Form ist aber im vorliegenden Falle nicht angebracht, weil beim Nebenschlußmotor der statischen elektrischen Charakteristik nur untergeordnete Bedeutung zukommt.

1) M. Breslauer, Elektrot. ZS. 26, S. 644, 1905. R. Pohl, Elektrot. ZS. 26, S. 959, 1905 und 27, S. 1009, 1906. W. Siebert, Elektrot. ZS. 27, S. 523, 1906.

(Wicklungsart, Betriebsspannung) ist, und die sich auch mit der Größe der Maschine nicht oder nur wenig ändern, nämlich die „spezifischen Anstiege“ der Charakteristiken m und E_0, sowie den Wirkungsgrad η und das Energieverhältnis v. Damit ist bewiesen, daß die Stabilität bei derselben Maschinentype unabhängig von Betriebsspannung und Wicklungsart ist und auch nur wenig von der Größe der Maschine abhängt.

Ferner gestattet die Form (6b) der Stabilitätsbedingung, die beiden in ihr auftretenden Glieder $\frac{\eta}{v} \frac{m'}{(m_0/\omega_0)}$ und $\frac{E_0'}{(E_0/J_0)}$ gegeneinander abzuschätzen. Es ist nämlich η nicht wesentlich verschieden von 1. v hatte in § 13 die Größenordnung 50 bis 100; mit Rücksicht darauf, daß dort $\frac{1}{2} L J_0^2$ die gesamte, in Anker- und Feldstromkreis aufgespeicherte magnetische Energie war, während hier $\frac{1}{2} L J_0^2$ nur die im Ankerstromkreis vorhandene Energie bedeutet, können wir hier bei normaler, d. h. geringster Tourenzahl und voller Belastung den Betrag von v mindestens zu 200 bis 500 annehmen; bei geringerer Belastung oder höherer Umdrehungszahl wird v noch größer. Der spezifische Anstieg $\frac{m'}{(m_0/\omega_0)}$ der Arbeitsmaschinencharakteristik ist, abgesehen von Ausnahmefällen [1]), nicht wesentlich größer als 1 (d. h. die Charakteristik ist nicht wesentlich steiler als eine durch den betreffenden Punkt und den Nullpunkt gehende Gerade), so daß, selbst wenn wir Charakteristiken m mit dem spezifischen Anstiege 2 zulassen, der erste Term in Gl. (6b) höchstens gleich $\frac{1}{100}$, im allgemeinen aber wesentlich kleiner ist. Um die Größe des zweiten Terms abzuschätzen, nehmen wir an, die Charakteristik $E_0(J_0)$ verlaufe geradlinig; dann ist bei Vollast der spezifische Anstieg $\frac{E_0'}{\left(\frac{E_0}{J_0}\right)}$ gleich der prozentualen Spannungserhöhung, die nötig ist, um den Motor bei Vollast

1) Als Ausnahmefall kommt hier wieder hauptsächlich der Fall in Betracht, daß die Arbeitsmaschine ein Gleichstromnebenschlußgenerator ist, der eine Akkumulatorenbatterie auflädt oder Strom zu elektrolytischen Zwecken liefert.

mit der gleichen Umdrehungszahl zu betreiben wie bei Leerlauf (konstanten Feldstrom vorausgesetzt), und diese Spannungserhöhung ist gleich dem prozentualen „Tourenabfall" zwischen Leerlauf und Vollast. Dieser Tourenabfall ist aber im allgemeinen wesentlich größer als $\frac{1}{100}$ (1 Proz.), und vor allem ist sein Betrag wegen der Eisenhysteresis meist um $\frac{1}{100}$ unsicher. Daraus folgt, daß in Gl. (6b) der erste Term im allgemeinen gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann; damit rechtfertigt es sich, daß Wagner[1]) bei seiner Ableitung der Stabilitätsbedingungen den Anstieg der mechanischen Charakteristik der Arbeitsmaschine überhaupt nicht berücksichtigt hat.

Wenn wir dementsprechend in Gl. (6b) nur den zweiten Term beibehalten, so erhalten wir, da $\frac{E_0}{J_0}$ stets positiv ist,

$$E_0' = \omega_0 h' + W > 0 \tag{6c}$$

als angenäherte Bedingung dafür, daß keine Pendelungen auftreten; oder auch, da nach Gl. (9) E_0' und M_0' stets entgegengesetztes Vorzeichen haben:

$$M_0' < 0; \tag{6d}$$

in Worten: Angenäherte Bedingung dafür, daß keine Pendelungen auftreten, ist die, daß der Motor abfallende mechanische Charakteristik hat.

In der Form (6c) sagt die Stabilitätsbedingung aus, daß Pendelungen nur bei genügend großem negativem $\omega_0 h'(J_0)$ auftreten können, d. h. nur dann, wenn durch den Ankerstrom das Hauptfeld um einen gewissen Mindestbetrag geschwächt wird, oder, wenn mit zunehmendem Ankerstrome die elektromotorische Gegenkraft (E.M.G.K.) ωh des Motors in genügendem Maße abnimmt. Hierdurch wird das Problem dieses Paragraphen in Beziehung gesetzt zu dem des § 12B, wo ein Gleichstrommotor mit ebenfalls konstanter Erregung behandelt wurde, der aber keine Ankerrückwirkung hatte, dessen E.M.G.K. also unabhängig vom aufgenommenen Strome war. Auch dort traten Pendelungen auf, und als Bedingung für deren Auftreten hatten wir gefunden, daß der

---

1) K. W. Wagner, l. c.

Anstieg der elektrischen Charakteristik des Generators (Hauptschlußdynamo), der den Motor speiste, einen gewissen Mindestbetrag haben mußte (Gl. (28a), S. 138). Nun ist für den vom Motor aufgenommenen Strom nur die Differenz zwischen angelegter Spannung und E.M.G.K. wesentlich; es muß also auf dasselbe hinauskommen, ob mit zunehmendem Strome die den Motor speisende E.M.K. zunimmt oder seine E.M.G.K. abnimmt. Nach § 12B sind also auch dann Pendelungen zu erwarten, wenn wir einen fremderregten Motor mit konstanter Spannung betreiben, und die E.M.G.K. ωh dieses Motors mit zunehmendem Strome in einem gewissen Mindestbetrage sinkt, und das ist gerade der Fall, der hier vorliegt. Damit sind die Pendelungen von Gleichstromnebenschlußmotoren, ebenso wie in § 13 u. 14 diejenigen bei Reihenschluß-Kraftübertragungsanlagen, zurückgeführt auf die relativ einfachen, in § 12B behandelten Schwingungen; beide Erscheinungen lassen sich daher auffassen als elektrische Schwingungen, bei denen der Gleichstrommotor die Rolle des Kondensators spielt.

D. Experimentelle Prüfung der Theorie. Um die Theorie zu prüfen, wurde ein Wendepolmotor näher untersucht, der zur Labilität neigte. Der Motor, der für 440 Volt und eine Dauerleistung von 6,6 PS. (bei 13,6 Amp.) gebaut war, war zweipolig; seine Drehzahl konnte durch Schwächung des Erregerstromes (von 0,55 bis 0,13 Amp.) zwischen 750 und 1500 Umdrehungen pro Minute verändert werden. Normalerweise waren die Bürsten ziemlich stark im Sinne der Drehrichtung vorgeschoben; zum Versuche wurden sie in die neutrale Zone gestellt. Belastet war der Motor mit einem Wechselstromgenerator, der durch einen Rheostaten geschlossen wurde; die Belastung konnte entweder durch Veränderung dieses Widerstandes oder durch Änderung der Erregung des Wechselstromgenerators geändert werden. Die mechanische Charakteristik dieser Arbeitsmaschine mußte, ebenso wie die der fremd erregten Gleichstromdynamo in § 9 (S. 77) eine durch den Nullpunkt gehende Gerade sein, wenn man von den Reibungsbremsmomenten absieht; es gilt also:

$$m' = \frac{m}{\omega_0}.$$

Bei diesem Motor wurden Pendelungen beobachtet bei dem durch folgende Werte von Erregerstrom i_0, Ankerstrom J_0 und Winkelgeschwindigkeit ω_0 bestimmten Betriebszustande:

$$i_0 = 0{,}140 \text{ Amp.}$$
$$J_0 = 11 \quad \text{"}$$
$$\omega_0 = 174 \quad \text{sec}^{-1}.$$

Vor den Anker war ein Widerstand von 0,5 Ω geschaltet, weil sonst die Pendelungen zu stark wurden. Die Pendelungen waren nicht stationär; vielmehr traten nach kleiner Störung des Gleichgewichtes (kurzdauernder Vergrößerung des Vorschaltwiderstandes) gedämpfte Schwingungen auf, während nach größerer Störung die Schwingungsamplitude anwuchs und zu unzulässigen Stromstärken führte, falls man nicht rechtzeitig Widerstand in den Ankerstromkreis einschaltete. Es mußte also eine gewisse mittlere Größe der Störung geben, bei der die Schwingungsamplitude konstant blieb, jedoch mußte dann der Zustand labil sein (weil nach dem Vorhergehenden die Dämpfung mit abnehmender Amplitude zunahm; vgl. S. 124) und konnte nicht realisiert werden. Die Periodendauer der Schwingung betrug ca. 3 sec.

Wenn unsere Theorie der Pendelungen richtig ist, so muß sich dieses Versuchsergebnis aus den Stabilitätsbedingungen (6) und (7) vorhersagen lassen; wie bekannt, muß sich nämlich aus a_2 (Gl. (7)) die Schwingungsdauer ergeben:

$$\tau = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a_2}},$$

während aus a_1 (Gl. (6)) die Dämpfungskonstante der Schwingungen folgt:

$$\delta = -\frac{a_1}{2}.$$

Die so berechneten Werte von τ und δ müßten mit den beobachteten ($\tau = 3$ sec, $\delta = 0$) übereinstimmen.

Um die Rechnung ausführen zu können, mußten die in Gl. (6) und (7) vorkommenden Motorkonstanten Θ, L, W, und die Funktion $h(J)$, aus der sich auch m annähernd berechnen läßt, bestimmt werden.

Zunächst wurde die $h(J)$-Kurve des Motors aufgenommen. Nach Gl. (3a) ist

$$h(J_0) = \frac{E_0 - J_0 W}{\omega_0}; \tag{3a}$$

es wurde dementsprechend bei konstantem Erregerstrom i_0 ($= 0{,}140$ Amp.) gleichzeitig E_0, J_0 und ω_0 gemessen, und zwar geschah die

Messung so, daß ω_0 konstant gehalten wurde (mittelst eines Zungenfrequenzmessers, an den die Wechselspannung der Belastungsmaschine gelegt wurde) und nun E_0 als Funktion von J_0 bestimmt wurde. Die erhaltene Kurve zeigt Fig. 57; man sieht, daß der Ankerstrom das Feld erheblich schwächt; bei Vollast (13,6 Amp.) beträgt diese Feldschwächung 15 Proz. Der Anstieg der $h(J)$-Kurve ist nach der Figur bei größeren Strömen ($J > 8$ Amp.) nahezu konstant und gleich — 0,045.

Dann wurde nach der auf S. 89/90 (Anm.) beschriebenen Methode das Trägheitsmoment Θ des Aggregats bestimmt und zu 0,9 Watt · sec³ gefunden. Ferner wurde die Selbstinduktion L des Ankerstromkreises gemessen. Da sie wegen der magnetischen Sättigung des Eisens von dem den Anker durchfließenden Gleichstrom abhängt, mußte zur Messung Gleichstrom von derselben Stärke wie beim Versuch (ca. 11 Amp.) benutzt werden; auch das Hauptfeld wurde eingeschaltet (Anker festgekeilt), um die von ihm hervorgebrachte Permeabilitätsänderung des Ankereisens zu berücksichtigen. Als geeignete Meßmethode erwies sich die Methode der Wheatstoneschen Brücke; als Vergleichsselbstinduktion diente eine große Spule (0,156 Henry, 3,5 Ω), die eisenfrei war und deren Selbstinduktion daher mit 50 periodigem Wechselstrom durch Messung von Strom und Spannung bestimmt werden konnte; zu ihr wurde ein Schieberheostat R von max. 2,7 Ω in Serie geschaltet. Da, wie oben bemerkt, die Messung mit dem beim Versuch verwendeten Strome von ca. 11 Amp. ausgeführt werden mußte, entfiel auf den Brückendraht eine beträchtliche Spannung (ca. 100 Volt); als Brückendraht wurde deshalb ein Ruhstratscher Schieberheostat verwendet und das Verhältnis der beiden Teilwiderstände durch Messung der Entfernung des Schleifkontakts von den beiden Enden des Widerstandsdrahtes bestimmt. Statt eines Galvanometers wurde ein Voltmeter für max. $\pm$ 3 Volt benutzt. Die Messung geschah so, daß der Widerstand R und der Schleifkontakt des Brückendrahtes so lange verändert wurden, bis sowohl bei konstantem Brücken-

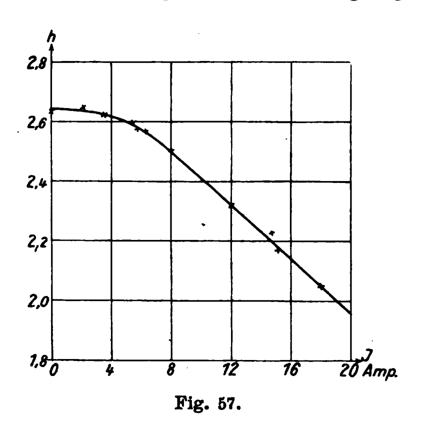


Fig. 57.

strom als auch bei plötzlicher Änderung desselben von 10 auf 11 Amp. oder umgekehrt der Voltmeterzeiger auf Null stehen blieb. So ließ sich die gesuchte Ankerselbstinduktion L auf ca. 10 Proz. genau messen; beschränkt wurde die Genauigkeit vor allem durch den variablen Bürstenübergangswiderstand, dem es wohl zuzuschreiben war, daß die Einstellung bei konstantem Brückenstrom etwas von der Stärke des Brückenstromes abhing und auch etwas schwankte; dadurch war die Verwendung eines empfindlicheren Galvanometers von vornherein ausgeschlossen. Es wurde so gefunden:

$$L = 0{,}1 \text{ Henry} \pm 10 \text{ Proz.}$$

Der Widerstand des Ankerstromkreises betrug 3,5 Ω; beim Versuch war also der Gesamtwiderstand (einschl. des Vorschaltwiderstandes von 0,5 Ω):

$$W = 4{,}0 \ \Omega.$$

Stellen wir die Werte der für den Motor und seinen Betriebszustand maßgebenden Größen noch einmal zusammen. Es war:

$$J_0 = 11 \text{ Amp.} \qquad L = 0{,}1 \text{ Henry}$$
$$\omega_0 = 174 \text{ sec}^{-1} \qquad \Theta = 0{,}9 \text{ Watt}\cdot\text{sec}^3$$
$$i_0 = 0{,}140 \text{ Amp.} \qquad h = 2{,}35 \text{ Volt}\cdot\text{sec}$$
$$W = 4{,}0 \ \Omega \qquad h' = -0{,}045 \ \Omega\cdot\text{sec}$$

$$m_0 = J_0 \cdot h = 25{,}8 \text{ Watt}\cdot\text{sec}$$

$$m' = \frac{m_0}{\omega_0} = 0{,}148 \text{ Watt}\cdot\text{sec}^2.$$

Einsetzung dieser Werte in Gleichung (6) und (7) ergibt:

$$a_1 = \frac{0{,}148}{0{,}9} + \frac{174\cdot(-0{,}045)+4{,}0}{0{,}1} = 0{,}16 - 38{,}3 \sim = -38 \text{ sec}^{-1}$$

$$a_2 = \frac{2{,}35\,(2{,}35-0{,}5) + 0{,}148\,(-3{,}83)}{0{,}9\cdot 0{,}1} = +42 \text{ sec}^{-2}.$$

Für Schwingungsdauer τ und Dämpfungskonstante δ ergibt sich hieraus:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2}} = 0{,}97 \text{ sec},$$

$$\delta = \frac{a_1}{2} = -19 \text{ sec}^{-1}.$$

Nach der Theorie müßte also die Periodendauer der Schwingung 1 sec (statt der beobachteten 3 sec) betragen, und ihre Amplitude

müßte in 1 sec auf den e^{19}- = $\sim 10^8$-fachen Betrag anschwellen, während sie in Wirklichkeit nahezu konstant blieb. Die Theorie wird also durch den Versuch zwar qualitativ insofern bestätigt, als überhaupt Pendelungen auftreten; quantitative Übereinstimmung ist aber nicht vorhanden.

E. Berücksichtigung der Wirbelströme. Die Ursache für diese Abweichung zwischen Theorie und Versuch sind wahrscheinlich die induzierten Ströme, die bei schnelleren Änderungen des Magnetfeldes in der Feldwicklung und in den massiven Polen des Motors (Wirbelströme) auftreten und auf das Magnetfeld zurückwirken. Diese Ströme treten an verschiedenen Stellen auf: in den Hauptpolen, in deren Wicklung und in den Hilfspolen; und es ist kaum anzunehmen, daß sie überall in gleicher Weise (gleichphasig) verlaufen. Wollte man daher diese Wirbelströme streng berücksichtigen, so würde man zu sehr komplizierten Ansätzen gelangen; wir wollen deshalb lieber die etwas willkürliche Annahme machen, daß alle auftretenden Wirbelströme in gleicher Weise verlaufen, so daß sämtliche Wirbelstromkreise durch einen einzigen „äquivalenten Wirbelstromkreis“, d. h. eine den gesamten Induktionsfluß umschlingende Kurzschlußspule, ersetzt werden können. Weiter wollen wir die vereinfachende Annahme machen, daß die Selbstinduktion des Ankerstromkreises nur von denjenigen Kraftlinienverkettungen herrührt, welche die Ankerrückwirkung, d. h. die durch den Ankerstrom bewirkte Feldänderung, verursachen. Hierbei wird allerdings der beträchtliche Teil der Selbstinduktion, welcher von den nicht mit dem Hauptfelde verketteten Ankerkraftlinien hervorgerufen wird, vernachlässigt; da aber, wie wir später sehen werden, die Ankerselbstinduktion überhaupt keine wesentliche Rolle spielt, so ist diese Vernachlässigung belanglos. Auf Grund obiger Annahme können wir nun Ankerrückwirkung und Selbstinduktionswirkung ansehen als herrührend von einer Spule von geeigneter Windungszahl, welche die Hauptpole umschließt.

Die Windungszahl der fiktiven Kurzschlußspule kann beliebig angenommen werden, wenn man ihren Widerstand geeignet annimmt. Wir wählen die Windungszahl gleich derjenigen der Selbstinduktionsspule. Dann wird durch die zeitlichen Änderungen des Magnetfeldes h in beiden Spulen stets die gleiche Spannung induziert; wir können sie daher zusammenfassen zu einer einzigen widerstandslosen Spule, die einerseits in den Ankerstromkreis ein-

geschaltet ist, andererseits durch einen Widerstand vom Betrage R (dem Widerstand der ursprünglichen Kurzschlußspule) geschlossen ist. Wir können demnach das zu behandelnde System uns durch das in Fig. 58 gezeichnete, ohne weiteres verständliche Schema ersetzt denken.

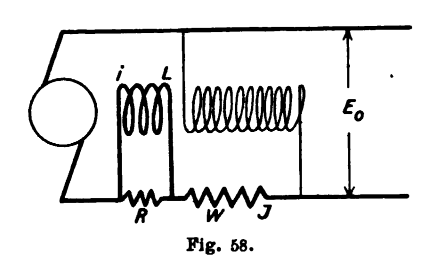


Fig. 58.

Ihm entsprechen folgende Gleichungen: Die Gleichung der Spannungen im Hauptstromkreise:

$$E_0 = \omega h(i)\,^{1)} + JW + L\frac{di}{dt}, \quad (10)$$

die Gleichung der Drehmomente:

$$\Theta\frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = J\cdot h(i) \quad (11)$$

und endlich die Gleichung für den Strom im Parallelwiderstande R:

$$L\frac{di}{dt} = R(J - i). \quad (12)$$

(Die Gleichungen (10) und (11) unterscheiden sich von den früheren Gleichungen (3) und (4) nur dadurch, daß verschiedentlich i statt J vorkommt.) Um aus diesem, etwas komplizierterem Gleichungssystem die Stabilitätsbedingungen abzuleiten, wollen wir die allgemeine Methode des § 4 verwenden. Wir bringen zunächst die Gleichungen (10) bis (12) in die Form der Gleichungen (1) des § 4:

$$WJ + L\frac{di}{dt} + \omega h(i) - E_0 = F_1 = 0, \quad (10\text{a})$$

$$-Jh(i) + \Theta\frac{d\omega}{dt} + m(\omega) = F_2 = 0, \quad (11\text{a})$$

$$RJ - Ri - L\frac{di}{dt} = F_3 = 0. \quad (12\text{a})$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man sofort die zur Differentialgleichung der kleinen Schwingungen gehörige „charakteristische" Gleichung, indem man die Determinantengleichung (6a)

1) Die Funktion $h(i)$ ist natürlich identisch mit der der statischen $h(J)$-Kurve entsprechenden Funktion, weil bei unendlich langsamen Änderungen der gesamte Strom J durch den widerstandslosen Zweig L fließt, also $i = J$ ist.

des § 4 bildet (die Variablen $x, y \ldots$ sind hier: J, i, ω); sie lautet hier:

$$\begin{vmatrix} W, & \omega_0 h' + \alpha L, & h \\ -h, & -J_0 h', & m' + \alpha\Theta \\ R, & -(R + \alpha L), & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

oder, in gewöhnlicher Schreibweise, nach Potenzen von α geordnet:

$$\alpha^2 \Theta L (R + W) + \alpha \{L m' (W + R) + L h^2 + R \Theta (W + \omega_0 h')\}$$
$$+ R \{m' (\omega_0 h' + W) + h(h + J_0 h')\} = 0,$$

oder, nach Division durch $\Theta L (R + W)$:

$$\alpha^2 + \alpha \left\{\frac{m'}{\Theta} + \frac{\omega_0 h' + W}{L\left(1 + \frac{W}{R}\right)} + \frac{h^2}{\Theta (R + W)}\right\}$$
$$+ \frac{m' (\omega_0 h' + W) + h(h + J_0 h')}{\Theta L \left(1 + \frac{W}{R}\right)} = 0. \tag{13a}$$

Zur Stabilität ist nach § 4 erforderlich, daß die Koeffizienten a_1 und a_2 dieser Gleichung positiv sind; demnach erhalten wir als Stabilitätsbedingungen:

$$a_1 = \frac{m'}{\Theta} + \frac{\omega_0 h' + W}{L\left(1 + \frac{W}{R}\right)} + \frac{h^2}{\Theta (R + W)} > 0; \tag{14}$$

$$a_2 = \frac{m' (\omega_0 h' + W) + h(h + J_0 h')}{\Theta L \left(1 + \frac{W}{R}\right)} > 0. \tag{15}$$

Vergleich dieser Stabilitätsbedingungen mit den Bedingungen (6) und (7), die wir ohne Berücksichtigung der Wirbelströme erhielten, zeigt, daß sich die neuen Stabilitätsbedingungen von den alten in zwei Punkten unterscheiden: einmal steht überall statt L der Ausdruck $L\left(1 + \frac{W}{R}\right)$, die Selbstinduktion erscheint also durch die Wirbelströme auf das $\left(1 + \frac{W}{R}\right)$fache vergrößert; außerdem ist in dem Ausdruck für a_1 (Gl. 14) der Term $\frac{h^2}{\Theta (R + W)}$ hinzugekommen. Dieser Term hat eine einfache physikalische Bedeutung: Fassen wir wieder den Motor als Kondensator auf, so ist dessen

Kapazität $C = \frac{\Theta}{h^2}$; der hinzugekommene Term ist also gleich $\frac{1}{C(W+R)}$. Vergleich mit Gl. (9) des § 12A (S. 107) zeigt, daß die dadurch bewirkte Erhöhung der Dämpfung die gleiche ist, wie wenn ein Widerstand $(W+R)$ parallel zu C geschaltet wäre.

Der Einfluß dieser Veränderung der Stabilitätsbedingungen auf die Größe von Schwingungsdauer τ und Dämpfungskonstante δ ist der, daß τ wegen der Zunahme von L vergrößert wird; δ wird ebenfalls vergrößert, einmal wegen der Verkleinerung des negativen Terms $\frac{\omega_0 h' + W}{L}$, dann auch wegen des neu hinzugekommenen, stets positiven Terms $\frac{h^2}{\Theta(W+R)}$. Dieser Einfluß ist also in der Tat dem Vorzeichen nach geeignet, die beobachtete Abweichung von der Theorie zu erklären; ob er allerdings imstande ist, quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch herbeizuführen, läßt sich schwer beurteilen, weil die Größe des fiktiven Widerstands R schwer zu bestimmen ist. Wir können aber eine Stichprobe auf die Richtigkeit unserer Theorie vornehmen, indem wir aus der beobachteten Schwingungsdauer τ mittelst Gl. (15) R berechnen und prüfen, ob mit diesem Werte von R sich aus Gl. (14) der beobachtete Wert der Dämpfungskonstante $\delta = \frac{a_1}{2}$ annähernd richtig ergibt: Bezeichnen wir mit $a_{2\,\text{beob.}}$ bzw. $a_{2\,\text{ber.}}$ und $\tau_{\text{beob.}}$ bzw. $\tau_{\text{ber.}}$ die beobachteten bzw. aus Gl. (7) berechneten Werte von a_2 und $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2}}$, so wird, wenn wir das a_2 aus Gl. (15) mit $a_{2\,\text{beob.}}$ identifizieren:

$$1 + \frac{W}{R} = \frac{a_{2\,\text{ber.}}}{a_{2\,\text{beob.}}} = \left(\frac{\tau_{\text{beob.}}}{\tau_{\text{ber.}}}\right)^2 = \left(\frac{3}{0{,}97}\right)^2 = 9{,}6;$$

also

$$R = \frac{1}{8{,}6} W = 0{,}465\ \Omega.$$

Einsetzung dieses Wertes für R in Gl. (14) ergibt:

$$a_1 = 0{,}16 - 4{,}0 + 1{,}38 = -2{,}46$$

und

$$\delta = \frac{a_1}{2} = -1{,}2.$$

Die frühere Theorie hatte $\delta = -19$ ergeben, während beim Versuch $\delta = 0$ beobachtet wurde; man sieht, daß in der Tat bei Annahme obigen Wertes von R der Unterschied zwischen Theorie und Versuch fast zum Verschwinden gebracht wird. Daß die Übereinstimmung keine absolute ist, ist nicht zu verwundern, da ja die Art und Weise, wie wir die Wirbelströme berücksichtigten, nur annähernd den wirklichen Verhältnissen entsprach.

Eine weitere Ursache für die noch vorhandene Abweichung liegt übrigens in der magnetischen Hysteresis des Eisens, welche bewirkt, daß h nicht nur von J bzw. i, sondern auch von der magnetischen Vorgeschichte des Eisens abhängt; die Wirkung ist derartig, daß bei Magnetisierungszyklen geringer Amplitude, d. h. bei kleinen Pendelungen des Stromes, wie wir sie hier betrachteten, die Änderungen der Induktion geringer sind, als sich aus der für Zyklen großer Amplitude aufgenommenen Magnetisierungskurve ergibt; bei unseren Pendelungen muß also der absolute Betrag von h' kleiner sein als der aus Fig. 57 entnommene; a_1 und δ müssen daher in Wirklichkeit größer sein als die theoretischen Werte, in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis. Auf diese Weise erklärt sich zum Teil auch die beobachtete Abnahme der Dämpfung mit zunehmender Amplitude und die daraus folgende Labilität des Schwingungszustandes[1]; denn h' muß sich um so mehr dem aus Fig. 57 entnommenen Werte nähern, a_1 und δ also um so kleiner werden, je größer die Amplitude der Magnetisierung, also des Stromes, ist.

Mit Rücksicht auf diese Unsicherheiten kann man also wohl sagen, daß unsere Theorie mit den Beobachtungen genügend übereinstimmt.

F. Diskussion der neuen Stabilitätsbedingungen. Wir können also unsere Gleichungen (14) und (15) als annähernd der Wirklichkeit entsprechende Stabilitätsbedingungen ansehen. Sie sagen folgendes aus:

1. Gleichung (15) ist, da der neu hinzugekommene Faktor $\left(1 + \frac{W}{R}\right)$ stets positiv ist, identisch mit der früheren Stabilitätsbedingung (7), also auch mit (7a) und (7b), sie verlangt also Erfüllung des mechanischen Stabilitätskriteriums B, falls die

1) Die Stabilität des Schwingungszustandes wird weiter unten (S. 232 f.) ausführlich behandelt.

mechanische Charakteristik des Motors abfällt ($M_0' < 0$), und Nichterfüllung des Kriteriums B, falls $M_0' > 0$; sie ist, wie jene, abgesehen von Ausnahmefällen, stets erfüllt.

2. Über Gleichung (14) ist folgendes zu sagen:

a) Falls es gestattet ist, das oben behandelte Beispiel als normalen Typus anzusehen, so ist aus den mitgeteilten Zahlen ersichtlich, daß der erste Term $\frac{m'}{\Theta}$ in Gl. (14) auch jetzt noch gegen die beiden anderen im allgemeinen zu vernachlässigen ist, trotz der durch die Wirbelströme hervorgerufenen Verkleinerung des zweiten Terms $\frac{\omega_0 h' + W}{L\left(1 + \frac{W}{R}\right)}$; nur wenn m' einen ausnahmsweise großen positiven oder negativen Betrag hat und Θ klein ist, kommt jener Term in Betracht; man sieht, daß dann ansteigende mechanische Charakteristik m der Arbeitsmaschine günstig, abfallende ungünstig für die Stabilität ist. Lassen wir dementsprechend in Gl. (14) den Term $\frac{m'}{\Theta}$ weg und multiplizieren den Rest mit $L\left(1 + \frac{W}{R}\right)$, so geht sie über in:

$$-(\omega_0 h' + W) = -E_0' < \frac{h^2}{\Theta}\frac{L}{R}. \tag{14a}$$

Danach muß der Anstieg E_0' der statischen Motorcharakteristik, d. h. die zur Konstanthaltung der Umdrehungszahl bei 1 Ampere Stromzunahme nötige Spannungserhöhung, entweder positiv sein, oder, falls er negativ ist, muß sein absoluter Betrag (der Abfall der Charakteristik bzw. die Spannungserniedrigung) kleiner bleiben als eine gewisse positive Größe $\frac{h^2}{\Theta}\frac{L}{R}$.

Aus den oben mitgeteilten Zahlen folgt ferner (wenn wir wieder die Annahme machen, daß auch in bezug hierauf das unter E behandelte Beispiel als Normalfall anzusehen ist), daß R klein gegen W ist, so daß statt des in Gl. (14) und (15) auftretenden Ausdrucks $\left(1 + \frac{W}{R}\right)L$ mit genügender Annäherung $\frac{W}{R}\cdot L$ gesetzt werden kann. Das bedeutet aber, daß die Selbstinduktion L des Ankerstromkreises zu vernachlässigen ist gegenüber der von den Wirbelströmen herrührenden zusätzlichen scheinbaren Selbst-

induktion $\frac{W}{R} \cdot L$. Dieses Resultat hatten wir oben schon vorweg genommen, um die nicht ganz der Wirklichkeit entsprechende Berücksichtigung der Selbstinduktion zu rechtfertigen. Die Größe L bedeutet demnach jetzt nur noch die Selbstinduktion des Wirbelstromkreises. L tritt ausschließlich in der Verbindung $\frac{L}{R}$ auf; $\frac{L}{R} = T_W$ ist die Zeitkonstante des Wirbelstromkreises und unabhängig von der Windungszahl der fiktiven Kurzschlußspule, falls nur deren räumliche Ausdehnung dieselbe ist. So verschwindet auch äußerlich die scheinbare Willkür, die darin lag, daß wir für die Windungszahl der Kurzschlußspule einen festen, durch die Ankerrückwirkung bestimmten Wert angenommen hatten.

[1]) Gl. (14a) läßt sich in eine Form bringen, die, ähnlich wie Gl. (6b), nur Größen von allgemeinerer Bedeutung enthält. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit J_0 und erweitern den Bruch rechts mit ω_0, so erhalten wir:

$$-E_0' J_0 < \frac{h J_0 h \omega_0}{\Theta \omega_0} T_W = \frac{m}{\Theta \omega_0} \eta E_0 T_W,$$

worin η wieder den elektrischen Wirkungsgrad des Motorankers bedeutet. Die Größe $\frac{\Theta \omega_0}{m} = T_M$ hat unter der Annahme, daß m proportional ω ist, eine analoge Bedeutung wie T_W; sie ist, wie in der Anmerkung zu S. 154 gezeigt wurde, die „mechanische Zeitkonstante" des Maschinenaggregats, d. i. gleich der Zeit, in der der mit der Arbeitsmaschine belastete Motor, von der Spannungsquelle abgeschaltet, seine Geschwindigkeit auf den e-ten Teil vermindert. Somit können wir die letzte Gleichung schreiben:

$$-\frac{E_0'}{E_0/J_0} < \eta \frac{T_W}{T_M} . \tag{14b}$$

Eine andere Form ergibt sich, wenn wir, statt in Gl. (14a) E_0' einzuführen, den Ausdruck $\omega_0 h' + W$ beibehalten; man erhält dann, wenn man die Gleichung durch $\frac{\omega_0 h}{J_0}$ dividiert:

$$-\frac{h'}{h/J_0} < \frac{W J_0}{h \omega_0} + \frac{h J_0}{\Theta \omega_0} T_W$$

1) Der folgende Absatz wurde nachträglich in Anlehnung an Humburg (siehe Nachtrag) an Stelle einer anderen Umformung eingefügt.

oder

$$-\frac{h'}{h/J_0} < \frac{1-\eta}{\eta} + \frac{T_W}{T_M}. \qquad (14\text{c})$$

Die beiden Gleichungen (14b) und (14c) enthalten jetzt nur noch die „spezifischen Anstiege“ der statischen Motorcharakteristik bzw. der $h(J)$-Kurve, sowie den Wirkungsgrad η und die beiden Zeitkonstanten, also in der Tat Größen, die bei einer bestimmten Maschinentype konstant, unabhängig von der Einzelausführung (Wicklungsart, Betriebsspannung) sind. Damit ist bewiesen, daß auch bei Berücksichtigung der Wirbelströme die Stabilität unabhängig von Betriebsspannung und Wicklungsart ist.

Man kann auch die Stabilitätsbedingung, ebenso wie die frühere (Gl. 6d) mit der mechanischen Charakteristik M_0 des Motors in Beziehung setzen durch Zuhilfenahme von Gl. (9):

$$M_0' = -\frac{h(h + J_0 h')}{E_0'}, \qquad (9)$$

die den Zusammenhang von E_0' und M_0' angibt. Damit aber in der Endgleichung nicht auch noch h' auftritt, eliminieren wir h' aus Gl. (9) mit Hilfe von Gl. (8a):

$$\omega_0 h' + W = E_0'. \qquad (8\text{a})$$

Man erhält so:

$$-E_0' = \frac{h\omega_0 - J_0 W}{J_0 + \frac{\omega_0 M_0'}{h}},$$

oder

$$-\frac{E_0'}{E_0/J_0} = \frac{\frac{h\omega_0}{E_0} - \frac{J_0 W}{E_0}}{1 + \frac{\omega_0 M_0'}{hJ_0}} = \frac{\eta - (1-\eta)}{1 + \frac{M_0'}{M_0/\omega_0}}. \qquad (9\text{a})\ [1]$$

Dieser Ausdruck, in Gl. (14b) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\eta - (1-\eta)}{1 + \frac{M_0'}{M_0/\omega_0}} < \eta \frac{T_W}{T_M};$$

1) Gl. (9a) zeigt auch, innerhalb welcher Grenzen die früher benutzte Beziehung richtig ist, daß E_0' das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie M_0'; dies trifft nämlich immer zu, wenn

$$\eta > 0{,}5 \text{ und } \left|\frac{M_0'}{M_0/\omega_0}\right| > 1$$

ist, beides Bedingungen, welche bei technischen Motoren stets erfüllt sind.

d. h. es muß, da bei technischen Motoren $\eta - (1 - \eta)$ stets positiv und $\left|\frac{M_0'}{M_0/\omega_0}\right|$ stets größer als 1 ist, entweder

$$\left.\begin{array}{c} M_0' < 0 \\ \text{oder} \\ 1 + \frac{M_0'}{M_0/\omega_0} > \left[1 - \frac{1-\eta}{\eta}\right] \frac{T_M}{T_W} \end{array}\right\} \tag{14d}$$

sein; oder, da $1 - \eta$ stets klein gegen η und T_M/T_W stets groß gegen 1 ist, angenähert:

$$\frac{M_0'}{M_0/\omega_0} > \frac{T_M}{T_W}. \tag{14e}$$

Zur Stabilität ist also nicht unbedingt erforderlich, daß die mechanische Charakteristik des Motors abfällt; sie darf auch ansteigen, falls nur ihr spezifischer Anstieg genügend groß ist; d. h. die Richtung der Charakteristik darf, falls sie ansteigt, nur wenig von der Senkrechten abweichen. Oder in einer dem Techniker näher liegenden Ausdrucksweise: Die Umdrehungszahl des Motors braucht nicht unbedingt mit wachsender Belastung abzufallen, sondern sie darf auch ein wenig innerhalb der durch Gl. (14d) bzw. (14e) gezogenen Grenze ansteigen.

Zur weiteren Diskussion sind die Formeln (14b) bis (14e) nicht recht geeignet, weil die in ihnen auftretenden Größen sich bei ein und derselben Maschine mit dem Betriebszustande (Belastung, Umdrehungszahl) stark ändern. Wir gehen deshalb wieder auf die Form (14a) der Stabilitätsbedingung zurück und schreiben sie:

$$\omega_0 h' + W + \frac{h^2}{\Theta} \frac{L}{R} > 0. \tag{14a}$$

Die einzige Größe, die in dieser Formel negativ werden kann, ist h'; also folgt:

1. Nichterfüllung von Gl. (14a) ist nur dann möglich, Pendelungsgefahr also nur dann vorhanden, wenn h' negativ ist.
2. Die Pendelungsgefahr ist um so größer
   a) je größer der Betrag von $-h'$,
   b) je größer die Drehgeschwindigkeit ω_0,
   c) je kleiner der Widerstand W des Ankerstromkreises,
   d) je kleiner die Zeitkonstante $\frac{L}{R}$ des äquivalenten Wirbelstromkreises, d. h. je weniger die Wirbelströme sich ausbilden können,

e) je schwächer das Feld h,

f) je größer das Trägheitsmoment Θ ist.

Die Einflüsse b) (Umdrehungszahl), d) (Wirbelströme[1])) und e) (Feld) wirken alle drei in dem Sinne, daß bei derselben Maschine die Pendelgefahr mit wachsender Drehzahl stark zunimmt; in der Tat hat man in der Praxis Pendelungen nur bei hohen Umdrehungszahlen (stark geschwächtem Magnetfeld) beobachtet.

Dagegen ist eine Abhängigkeit der Pendelgefahr von der Belastung des Motors (d. h. vom Ankerstrom) direkt nicht vorhanden, sondern nur insoweit, als die Größen h und h' vom Ankerstrom abhängen (die Änderung der Drehzahl ω_0 mit der Belastung ist bei Motoren, die zum Pendeln neigen, so gering, daß sie vernachlässigt werden kann). h nimmt mit wachsender Belastung ab, weil, wenn überhaupt Pendelgefahr vorhanden ist, h' negativ ist; bei konstantem h' (geradliniger $h(J)$-Kurve) nimmt also die Pendelgefahr mit wachsender Belastung zu; die Zunahme ist aber gering. Wesentlich größeren Einfluß auf die Stabilität hat im allgemeinen die Krümmung der $h(J)$-Kurve und die dadurch hervorgerufene Abhängigkeit des h' von der Belastung. Ist die $h(J)$-Kurve nach unten konvex ($h'' > 0$), so nimmt der Betrag von $-h'$ und damit die Pendelgefahr mit wachsender Belastung ab; ist die $h(J)$-Kurve nach unten konkav ($h'' < 0$), so nimmt die Pendelgefahr mit wachsender Belastung zu.

Von dem Gesichtspunkte der Vermeidung des Pendelns aus ist folgendes zu sagen:

Von den für die Stabilität maßgebenden Größen ist ein großer Teil (Betriebsspannung, Umdrehungszahl und damit h) von vornherein festgelegt; ein anderer Teil $\left(\Theta, \frac{L}{R}\right)$ kann ohne besondere Maßnahmen nur durch Änderung der Maschinengröße verändert werden; W muß im Interesse des Wirkungsgrades, und um zu hohe Erwärmung zu vermeiden, möglichst klein gehalten werden. Die einzige Größe, die geändert werden kann, ohne die wesentlichen Betriebskonstanten der Maschine zu ändern, ist die Größe h'; wir können somit sagen, daß die Stabilität eines Wendepolmotors im wesentlichen nur von dem Anstieg h' der $h(J)$-Kurve abhängt,

---

1) Die Wirbelströme deshalb, weil bei höherer Umdrehungszahl (geschwächtem Feld) wegen des Vorschaltwiderstandes vor der Magnetwicklung sich die in ihr induzierten Ströme weniger ausbilden können.

oder daß die Ursache etwa vorhandener Pendelungen stets ein zu großer negativer Wert von h' ist.

Wir wollen deshalb im folgenden Abschnitt untersuchen, von welchen Bedingungen die Größe h' abhängt und zu diesem Zwecke feststellen, wie bei den praktisch ausgeführten Motoren die $h(J)$-Kurven verlaufen.

G. Die $h(J)$-Kurven und die Ankerrückwirkung. Die Erscheinung, daß das Magnetfeld h einer Dynamomaschine oder eines Motors nicht konstant ist, sondern sich mit der Belastung, d. h. mit dem Ankerstrome ändert, nennt man „Ankerrückwirkung". Wir hätten also Art und Größe der Ankerrückwirkung bei Gleichstrommotoren zu diskutieren. Da es in der elektrotechnischen Literatur an einer einheitlichen Darstellung dieser Erscheinungen fehlt, so sei gestattet, im folgenden die Ankerrückwirkung etwas ausführlicher zu behandeln, als es eigentlich dem Rahmen dieses Buches angemessen ist, und zwar wollen wir in die Untersuchung nicht nur Motoren, sondern auch Dynamomaschinen (Generatoren) einbeziehen [1]).

Die Ankerrückwirkung besteht in einer Veränderung des Hauptfeldes h durch den im Ankerkreise fließenden Strom. Diese Veränderung kann auf dreierlei Weise zustande kommen:

a) Durch eine vom Ankerstrom hervorgerufene zusätzliche Längsmagnetisierung;

b) durch Quermagnetisierung und dadurch veränderte Permeabilität des Eisens;

c) durch Ströme, die in den von den Bürsten kurzgeschlossenen Spulen auftreten (Kurzschlußströme).

In allen drei Fällen wird die Ankerrückwirkung, ob direkt oder indirekt, durch die magnetische Wirkung des Ankerstromes verursacht; die Ankerrückwirkung muß daher allgemein um so größer sein, je größer das Verhältnis der Zahl der Anker-A.W. [2]) zu der der Feld-A.W. ist.

Wie im einzelnen die drei Teilwirkungen sich äußern, wollen

---

1) Die folgende Darstellung unterscheidet sich von den in den technischen Lehrbüchern üblichen vor allem durch die Berücksichtigung der Kurzschlußströme, deren Einfluß auf das Hauptfeld zwar vielfach erkannt (Pohl, Rüdenberg, Rosenberg), aber nirgendwo in eine systematische Darstellung der Ankerrückwirkung eingearbeitet worden ist.

2) Die Abkürzung „A.W." bedeutet hier und im folgenden „Amperewindungen".

wir im folgenden untersuchen, und dabei vor allem versuchen, Aufschluß zu erhalten über die Frage: Wie hängt bei jeder dieser Teilwirkungen die erzeugte Feldänderung δh vom Ankerstrome J ab?

a) Ankerrückwirkung durch Längsmagnetisierung.

Wir sagen, der Ankerstrom erzeugt eine Längsmagnetisierung, wenn der magnetische Kreis, der aus Anker, Polen und Schlußjoch gebildet wird (Fig. 59; als Begrenzung des magnetischen Kreises kann man etwa die punktierte Linie nehmen) von Windungen umschlungen wird, welche vom Ankerstrome durchflossen werden. Eine solche längsmagnetisierende Wirkung ist vor allem dann vorhanden, wenn die Feldmagnete eine vom Ankerstrom durchflossene Hilfswicklung (Compoundwicklung) tragen. Diese Compoundwicklungen werden sowohl bei Generatoren als auch bei Motoren fast ausschließlich so geschaltet, daß sie das Feld verstärken. Aber auch wenn keine solchen Hilfswicklungen vorhanden sind, können längsmagnetisierende A.W. des Ankerstromes auftreten, wie Fig. 59 zeigt; man sieht, daß bei der dort gezeichneten Bürstenstellung in der Tat solche längsmagnetisierenden A.W. vorhanden sind, nämlich diejenigen Ankerdrähte, welche zwischen a und c einerseits und b und d andrerseits liegen, während die zwischen c und b einerseits und a und d andrerseits liegenden Leiter den magnetischen Kreis nicht direkt beeinflussen. Die Gerade ab ist dabei die Linie, in der die Bürsten stehen, cd die dazu symmetrische Richtung. Man erkennt, daß die Anzahl dieser längsmagnetisierenden A.W. null ist, wenn die Bürsten in der Symmetrielinie, d. h. in der geometrischen neutralen Zone (G.N.Z.) stehen, und daß sie im übrigen proportional der Verschiebung der Bürsten aus dieser Zone ist. Da diese Verschiebung stets nur klein ist, kommt immer nur ein geringer Bruchteil der Anker-A.W. für die Längsmagnetisierung in Betracht; da andrerseits bei technischen Maschinen die gesamte Zahl der Anker-A.W. stets kleiner ist als die Zahl der Feld-A.W., so folgt, daß die Zahl der längsmagnetisierenden

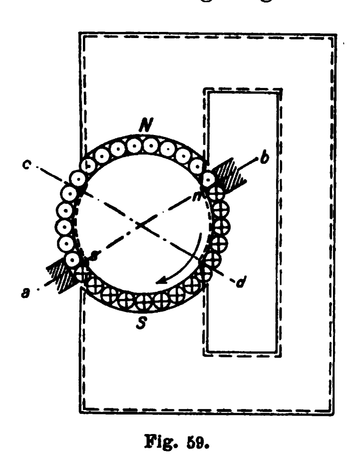


Fig. 59.

A.W. stets klein gegen die Zahl der Feld-A.W. ist; bei modernen Maschinen, bei denen die Bürsten meistens nur wenig aus der G.N.Z. verschoben sind, ist ihr Einfluß fast stets zu vernachlässigen.

Das Vorzeichen der durch die Bürstenverschiebung hervorgebrachten Feldänderung findet man durch folgende Überlegung: denkt man sich das elektromagnetische Drehmoment der Maschine hervorgebracht durch die Anziehung bzw. Abstoßung der in den Feldmagneten und im Anker auftretenden Magnetpole (Fig. 59), so erkennt man, daß bei Bürstenverschiebung im Sinne des auftretenden Drehmomentes (Pfeilrichtung) — d. h. im Sinne der Drehrichtung (vorwärts) beim Motor, entgegen der Drehrichtung (rückwärts) beim Generator — die ungleichnamigen Pole einander genähert werden, das Feld also verstärkt wird; bei entgegengesetzter Bürstenverschiebung wird das Feld geschwächt. Bei derjenigen Bürstenstellung, die für funkenlosen Lauf einer frei kommutierenden Maschine erforderlich ist, wird also das Feld stets geschwächt.

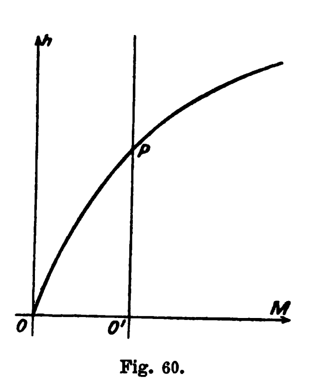


Fig. 60.

Die Abhängigkeit der durch etwa vorhandene längsmagnetisierende A.W. hervorgebrachten Feldänderung vom Ankerstrom ersieht man aus Fig. 60, in der die Kurve OP die Abhängigkeit des Induktionsflusses oder der ihm proportionalen Größe h als Funktion der gesamten A.W. M darstellt. P sei der den Feld-A.W. allein entsprechende Punkt, also OO' die Feld-A.W., $O'P = h_0$ das Magnetfeld bei Leerlauf. Man erhält dann die Kurve, welche h als Funktion der längsmagnetisierenden Anker-A.W. darstellt, einfach durch Verlegung der Ordinatenachse in die Lage $O'P$. Bis auf den Maßstab gibt diese Kurve auch die Abhängigkeit des h vom Ankerstrom J; je nachdem der Ankerstrom feldverstärkend oder feldschwächend wirkt, ist J nach rechts oder nach links positiv zu rechnen, also der rechts von $O'P$ oder der links von $O'P$ gelegene Teil der $h(M)$-Kurve zu benutzen. Die so entstehende $h(J)$-Kurve ist stets nach unten konkav. Ist die Anzahl der längsmagnetisierenden Anker-A.W. klein, so kann das in Betracht kommende Stück der Kurve sls geradlinig angesehen werden; in erster Annäherung erzeugen also die längsmagnetisieren-

den Anker-A.W. eine dem Ankerstrom proportionale Feldänderung.

Endlich gehört hierher auch die magnetisierende Wirkung von Hilfspolen (Wendepolen). Solche Hilfspole werden bekanntlich angewandt, um eine gute Stromwendung zu erzielen; sie werden in der G.N.Z. angeordnet, und sind so geschaltet, daß sie in der Kommutierungszone ein dem Ankerfelde entgegen gerichtetes, überwiegendes Magnetfeld erzeugen, also Magnetpole von gleicher Polarität wie die Ankerpole bilden (Fig. 61). Man sieht aus der Figur, daß bei symmetrischer Bürstenstellung die Hilfspole keinen direkten Einfluß auf das für die erzeugte E.M.K. maßgebende Magnetfeld haben, weil in jede Ankerhälfte von den Hilfspolen her ebensoviele Kraftlinien ein- wie austreten, daß aber bei einer Verschiebung der Bürsten aus der G.N.Z. der Wendepolfluß unsymmetrisch zu den Bürsten in den Anker eintritt und eine Veränderung des Gesamtflusses bewirkt, die, solange die Bürsten unter den Wendepolen bleiben, proportional der Bürstenverschiebung ist; und zwar muß nach Fig. 61 bei einer Bürstenverschiebung im Sinne des auftretenden Drehmomentes (Pfeilrichtung, diese Bürstenstellung ist in Fig. 61 gezeichnet), d. h. bei Vorwärtsverschiebung beim Motor, Rückwärtsverschiebung beim Generator, das Hauptfeld verstärkt, bei entgegengesetzter Verschiebung geschwächt werden. Die durch Bürstenverschiebung hervorgerufene Feldänderung hat also bei Vorhandensein von Wendepolen das gleiche Vorzeichen wie bei Maschinen ohne Wendepole; sie ist aber bei Anwesenheit von Wendepolen wesentlich größer.

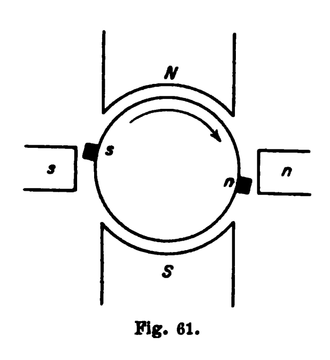


Fig. 61.

Die Abhängigkeit der Feldänderung vom Ankerstrome ist hier eine etwas andere als oben, weil die Wendepole nicht dem Hauptkreis angehören, sondern einen besonderen magnetischen Kreis für sich bilden, durch den bei verschwindendem Ankerstrom keine Induktionslinien treten. Daher ist zwar bei kleinem Ankerstrom auch hier die Feldänderung dem Ankerstrome proportional; bei größerem Ankerstrome muß sich aber in den Wendepolen die Sättigung bemerkbar machen, also die Feldänderung mit zunehmendem Ankerstrome langsamer als proportional anwachsen. Demnach muß

hier die $h(J)$-Kurve, falls das Hauptfeld durch den Ankerstrom verstärkt wird, wie bisher nach unten konkav, falls es aber geschwächt wird, nach unten konvex sein.

Zusammenfassend können wir über die längsmagnetisierenden Anker-A.W. sagen: Sie erzeugen eine dem Ankerstrome annähernd proportionale Feldänderung; genauer ist die $h(J)$-Kurve nach unten konkav bis auf den Fall, daß bei einer Wendepolmaschine durch Bürstenverschiebung eine Feldschwächung hervorgerufen wird; in diesem Falle ist die $h(J)$-Kurve nach unten konvex. Die Feldänderung ist, soweit sie nicht von einer Compoundwicklung herrührt, proportional der Verschiebung der Bürsten aus der geometrischen neutralen Zone; das Vorzeichen der Feldänderung ist bei allen Maschinen, mit oder ohne Wendepole, durch folgende Tabelle gegeben:

Bürstenverschiebung	Feldänderung beim Generator	Feldänderung beim Motor
vorwärts	—	+
rückwärts	+	—

(+ bedeutet Feldverstärkung, — Feldschwächung.)

b) Ankerrückwirkung durch Quermagnetisierung.

Auch wenn der magnetische Kreis der Maschine nicht von Ankeramperewindungen umschlungen wird, kann eine Beeinflussung des Magnetfeldes durch den Ankerstrom stattfinden. Denn der Ankerstrom verursacht außer dem bei Bürstenverschiebung auftretenden Längsfeld noch ein senkrecht dazu gerichtetes Feld (Querfeld), das erzeugt wird durch die in Fig. 59 zwischen den Punkten c und b einerseits, a und d andrerseits liegenden Ankerleiter.. Diese „quermagnetisierenden A.W.“ erzeugen nun zwar bei nicht vorhandenem Hauptfelde keinen magnetischen Fluß in dem Hauptkreise; damit ist aber nicht gesagt, daß sie bei vorhandenem Hauptfelde keine Wirkung haben. Denn da die Magnetisierungskurve des Eisens nicht geradlinig ist, lassen sich Hauptfeld und Ankerfeld nicht einfach übereinander superponieren. Man kann diesen Tatbestand auch so ausdrücken: Das hinzukommende Querfeld setzt sich mit dem Hauptfelde zu einem resultierenden Felde zusammen; dadurch wird die Induktionsliniendichte und damit die magnetische Leitfähigkeit des Kreises geändert, so daß die Längskomponente des resultierenden Feldes

nicht gleich dem ursprünglichen Längsfelde ist, trotzdem die entsprechende Komponente der magnetomotorischen Kraft unverändert geblieben ist.

Wir wollen untersuchen, wie diese Art der Ankerrückwirkung vom Ankerstrome abhängt. Für uns kommen im wesentlichen nur die unter den Polen gelegenen Ankerleiter in Betracht, weil das von den übrigen Ankerdrähten erzeugte Feld zum großen Teile in der Luft verläuft und daher nur geringe Intensität besitzt (Streufeld). Zunächst denken wir uns die in Betracht kommenden Ankerleiter unter der Polmitte zu einer Spule AB (Fig. 62) konzentriert und außerdem zwei weitere fiktive Hilfsspulen ab und $a'b'$ angebracht; das

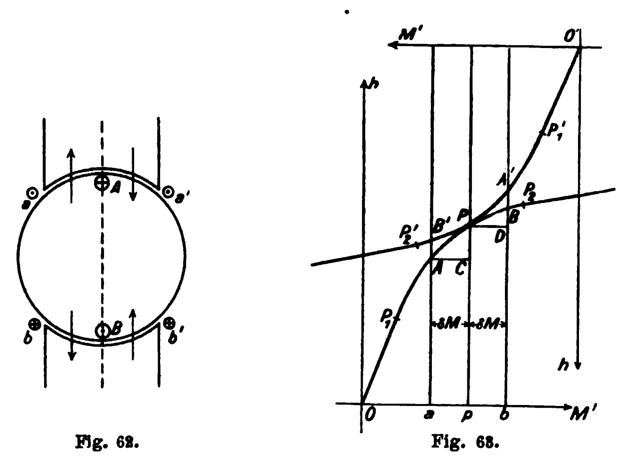


Fig. 62. Fig. 63.

ist erlaubt, weil diese Spulen nur das Streufeld ändern, das wir ja sowieso nicht berücksichtigen. Die beiden Spulen ab und $a'b'$ sollen zusammen die gleiche Anzahl A.W. haben wie AB, aber in entgegengesetzter Richtung vom Strome durchflossen sein. Wir denken uns nun noch die Spule AB durch einen Längsschnitt (punktierte Linie, Fig. 62) in zwei Hälften zerlegt; je eine Hälfte der Spulenseite A fassen wir mit einer Spulenseite a bzw. a' zusammen, ebenso die eine Hälfte von B mit b, die andere mit b'. Somit können wir uns den Teil des magnetischen Kreises der Maschine, der in der Umgebung eines Luftspaltes liegt, in zwei einander parallel geschaltete Zweige zerlegt denken, auf die zwei zusätzliche gleiche, aber entgegengerichtete magnetomotorische Kräfte wirken, die dem Ankerstrom proportional sind und die im einen Zweig eine Verstärkung, im andern eine Schwächung des

Hauptfeldes hervorrufen. Die dadurch hervorgebrachte Änderung des Gesamtfeldes läßt sich an Hand von Fig. 63 übersehen:

In dieser Figur sei $OAPB$ die Magnetisierungskurve des verzweigten Teiles des magnetischen Kreises; sie stellt den Induktionsfluß h (gemessen in dem bisher verwendeten Maße) als Funktion der gesamten auf den verzweigten Teil entfallenden A.W. M' dar. P sei der dem Leerlauf (Ankerstrom null) entsprechende Punkt, also $\overline{pP} = h_0$ der gesamte Induktionsfluß bei Leerlauf, $\overline{Op} = M'_0$ der auf die Zweige entfallende Teil der Feld-A.W.; dieses M'_0 wollen wir zunächst als unabhängig vom Ankerstrom ansehen.

Durch die vom Ankerstrom herrührenden Zusatz-A.W. δM werden in dem einen Zweige die A.W. auf den Betrag $M'_0 + \delta M = \overline{Ob}$ vergrößert, im andern auf den Betrag $M'_0 - \delta M = \overline{Oa}$ verkleinert. Entsprechend wird im einen Zweige der magnetische Fluß um den Betrag $\delta_2 h$ von $\frac{1}{2}\overline{pP}$ auf $\frac{1}{2}\overline{bB}$ vergrößert, im andern um $-\delta_1 h$ auf $\frac{1}{2}\overline{aA}$ verkleinert. Die gesamte Änderung des Flusses beträgt also

$$\delta h = h - h_0 = \delta_1 h + \delta_2 h = \tfrac{1}{2}(\overline{aA} + \overline{bB}) - \overline{pP}.$$

Daraus ergibt sich folgende graphische Konstruktion für δh: Man zeichne in Fig. 63 die Magnetisierungskurve noch einmal ein, aber in der Papierebene um den Punkt P um 180^0 gedreht (Kurve $O'A'PB'$); dann ist

$$\delta h = \tfrac{1}{2}(\overline{aA} + \overline{bB} - 2\overline{pP}) = -\tfrac{1}{2}\overline{AB'} = -\tfrac{1}{2}\overline{A'B}.$$

Die zwischen den beiden Kurven OAP und $B'P$ gelegenen Ordinatenstücke geben uns also, negativ genommen, direkt die doppelte Feldänderung δh als Funktion der Zusatz-A.W. δM (kurz: die $\delta h(\delta M)$-Kurve), und da δM proportional dem Ankerstrom J ist, bis auf den Maßstab auch die $\delta h(J)$-Kurve.

Die Figur läßt folgendes erkennen: Erstens: δh ist stets negativ, das Feld wird also durch die Quermagnetisierung geschwächt. Zweitens: Die $\delta h(J)$-Kurve berührt die Abszissenachse im Nullpunkte, biegt dann parabelartig in den IV. Quadranten hinunter und verläuft schließlich nahezu geradlinig, weil die Magnetisierungskurve $h(M')$ in größerer Entfernung vom Knie (sowohl bei schwacher, wie bei starker Magnetisierung) nahezu geradlinig ist. Die gesuchte $h(J)$-Kurve ($h = h_0 + \delta h$) muß demnach einen ähnlichen Verlauf haben wie die experimentell gefundene Kurve Fig. 57 [1]). Die Neigung der $h(J)$- oder $\delta h(J)$-Kurve ist in dem letzten, gerad-

1) Analytisch läßt sich der so gefundene Verlauf der $\delta h(J)$-Kurve an-

linigen Teil unabhängig von der Lage des Punktes P auf der $h(M')$-Kurve, d. h. unabhängig vom Hauptfeld; die Neigung der entsprechenden $\delta h(\delta M)$-Kurve ist nämlich einfach gleich der Differenz der „Anstiege" der $h(M')$-Kurve bei geringer und starker Magnetisierung. Bezeichnen wir die Punkte der $h(M')$-Kurve, von denen ab deren Neigung annähernd konstant ist, mit P_1 und P_2, bzw. P_1' und P_2', so wird, wie die Figur zeigt, die Neigung der $\delta h(\delta M)$-Kurve konstant, sobald die Linie $B'A$, von rechts her kommend, die Punkte P_1 und P_2' überschritten hat; diesen Teil konstanter Neigung erreicht die $\delta h(\delta M)$-Kurve also am frühesten, wenn die Abszisse von P in der Mitte zwischen denjenigen von P_1 und P_2 liegt, d. h. wenn P sich etwa an der Stelle stärkster Krümmung (dem Knie) der Magnetisierungskurve befindet. Es ist leicht zu erkennen, daß in diesem Falle die $\delta h(\delta M)$-Kurve sich bei gleichem δM am weitesten von der Abszissenachse entfernen, die Feldschwächung $-\delta h$ also am größten sein muß.

Für kleine δM läßt sich der Verlauf der $\delta h(\delta M)$-Kurve auch analytisch berechnen. Es ist nämlich

$$\delta h = \delta_2 h + \delta_1 h = {}^1/_2(\overline{BD} - \overline{PC}).$$

Bei kleinem δM ist angenähert

$$\delta_2 h = {}^1/_2 \overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dM'}\right)_{M'_0 + {}^1/_2 \delta M} \cdot \delta M;$$

$$-\delta_1 h = {}^1/_2 \overline{PC} = \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dM'}\right)_{M'_0 - {}^1/_2 \delta M} \cdot \delta M;$$

also

$$\delta h = \delta_2 h + \delta_1 h = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dh}{dM'}\right)_{M'_0 + {}^1/_2 \delta M} - \left(\frac{dh}{dM'}\right)_{M'_0 - {}^1/_2 \delta M}\right] \cdot \delta M$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dM'}\left(\frac{dh}{dM'}\right) \cdot \delta M\right] \cdot \delta M$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2 h}{dM'^2} \cdot \delta M^2. \qquad (17)$$

---

nähernd darstellen durch die Gleichung einer Hyperbel:

$$\delta h = b - \sqrt{b^2 + a^2 J^2}; \qquad (16)$$

denn für kleines J läßt sich die Wurzel entwickeln:

$$\delta h = b\left(1 - \left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} J^2\right]\right) = -\frac{a^2}{2b} J^2,$$

während für großes J unter der Wurzel b^2 gegen $a^2 J^2$ zu vernachlässigen ist:

$$\delta h = b - aJ.$$

Die Hyperbel verläuft also in der Tat bei kleinem J wie eine Parabel, bei großem J wie eine gerade Linie.

Die $\delta h(\delta M)$-Kurve verläuft also in der Nähe des Nullpunktes in der Tat wie eine Parabel; ihre Ordinaten sind proportional der zweiten Ableitung $\frac{d^2h}{dM'^2}$ der Magnetisierungskurve $h(M')$. Da diese Kurve stets nach unten konkav ist, so ist $\frac{d^2h}{dM'^2}$ stets negativ; es ist um so größer, je größer Krümmung und Anstieg der $h(M')$-Kurve ist und erreicht seinen größten Betrag etwas unterhalb der Stelle stärkster Krümmung der $h(M')$-Kurve; es ergibt sich also auch hier, daß die Feldschwächung am größten ist, wenn der Punkt P in der Nähe des Knies der Magnetisierungskurve liegt, wenn also das Feld bei Leerlauf (h_0) eine mittlere Kraftliniendichte besitzt.

Die hier maßgebende Magnetisierungskurve $h(M')$ ist diejenige des verzweigten Teiles des magnetischen Kreises. Dieser Teil enthält den Luftspalt, die Ankerzähne und Teile von Anker und Polschuhen. Wesentlich für die Magnetisierungskurve sind nur Luftspalt und Ankerzähne, der magnetische Widerstand von Polschuhen und Anker ist so klein, daß er i. allg. vernachlässigt werden kann. Für kleine δM, für die Gl. (17) gilt, läßt sich die Wirkung von Luftspalt und Ankerzähnen trennen. Dazu schreiben wir die Gleichung der Magnetisierungskurve umgekehrt wie bisher:

$$M' = M'(h)$$

und zerlegen:

$$M' = W_l \cdot h + M_1(h);$$

darin ist W_l der konstante magnetische Widerstand des Luftspaltes, also $W_l \cdot h$ die auf den Luftspalt und $M_1(h)$ die auf die Zähne entfallenden A.W. Dann ist

$$\frac{d^2h}{dM'^2} = -\frac{\frac{d^2M'}{dh^2}}{\left(\frac{dM'}{dh}\right)^3} = -\frac{\frac{d^2M_1}{dh^2}}{\left(W_l + \frac{dM_1}{dh}\right)^3}$$

$$= -\frac{\frac{d^2M_1}{dh^2}}{\left(\frac{dM_1}{dh}\right)^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + W_l \Big/ \frac{dM_1}{dh}\right)^3} = \frac{\frac{d^2h}{dM_1^2}}{\left(1 + W_l \Big/ \frac{dM_1}{dh}\right)^3}. \tag{18}$$

Man sieht: $\frac{d^2h}{dM'^2}$ und damit die Feldschwächung δh ist pro-

portional zu $\frac{d^2h}{dM_1^2}$; d. h. die Magnetisierungskurve $h(M_1)$ der Ankerzähne spielt jetzt dieselbe Rolle, wie früher die Magnetisierungskurve $h(M')$ eines ganzen Zweiges; die Feldschwächung wird also am größten bei einer bestimmten mittleren Kraftliniendichte in den Ankerzähnen. Außerdem tritt noch ein Faktor $\frac{1}{\left(1 + W_l \Big/ \frac{dM_1}{dh}\right)^3}$ hinzu, der stets kleiner als 1 ist und bewirkt, daß die Feldschwächung um so geringer wird, je größer der magnetische Widerstand W_l des Luftspaltes und je kleiner $\frac{dM_1}{dh}$ bzw. je größer $\frac{dh}{dM_1}$, der Anstieg der Zahnmagnetisierungskurve ist. Bei geringer Zahnsättigung ist $\frac{dM_1}{dh}$ annähernd gleich $\frac{M_1}{h}$, d. i. gleich dem magnetischen Widerstande des Eisenweges und daher klein gegen W_l; dann kann in Gl. (18) auf der rechten Seite die 1 im Nenner vernachlässigt werden; angenähert ist also $\frac{d^2h}{dM'^2}$ und damit die Feldschwächung δh umgekehrt proportional der dritten Potenz des magnetischen Widerstandes und damit der Weite des Luftspaltes. Diese starke Abhängigkeit der Feldschwächung durch Quermagnetisierung von der Größe des Luftspaltes ist wichtig, weil daraus hervorgeht, daß man eine zu große Feldschwächung schon durch eine sehr geringe Vergrößerung des Luftspaltes beseitigen kann.

Bisher hatten wir uns die Ankerleiter unter der Polmitte konzentriert gedacht. In Wirklichkeit sind die Ankerleiter mehr oder weniger gleichmäßig unter den Polen verteilt; daher ist die Zahl der Zusatz-A.W. nicht mehr in jeder Polhälfte konstant, sondern vom Orte abhängig; sie ist proportional der Entfernung s von der Polmitte:

$$\delta M = m \cdot s$$

(m ist eine Konstante). An den Polkanten ($s = \pm s_0$) hat δM den gleichen Betrag δM_0 wie früher längs der ganzen Polhälfte:

$$\delta M_0 = \pm m s_0.$$

In einer Zone von der Breite ds erzeugt δM eine Veränderung des Induktionsflusses von der Größe

$$d\delta' h = \delta\mathfrak{B} \cdot ds$$

($\mathfrak{B}$ ist der Induktionsfluß pro cm Polbreite, $\delta\mathfrak{B}$ seine Änderung); die Gesamtänderung wird also gleich

$$\delta' h = \int_{-s_0}^{+s_0} \delta\mathfrak{B}\, ds.$$

Um diese Anderung aus der oben ermittelten Feldänderung δh berechnen zu können, fassen wir je zwei symmetrisch zur Polmitte (d. h. in der Entfernung $\pm s$) gelegene Streifen zusammen:

$$\delta' h = \int_0^{s_0} (\delta\mathfrak{B}_{+s} + \delta\mathfrak{B}_{-s})\, ds,$$

oder mit Einführung von δM als Integrationsvariabeln:

$$\delta' h = \frac{1}{m} \int_0^{\delta M_0} \left(\delta\mathfrak{B}_{+\delta M} + \delta\mathfrak{B}_{-\delta M}\right) d(\delta M).$$

Die Kurve OP in Fig. 63 stellte den gesamten Induktionsfluß h als Funktion von δM dar; die Funktion $\mathfrak{B}(\delta M)$ ist also gleich diesem h, dividiert durch die Polbreite $2s_0$, also

$$\delta\mathfrak{B}_{+\delta M} = \frac{\delta_2 h}{s_0}; \quad \delta\mathfrak{B}_{-\delta M} = \frac{\delta_1 h}{s_0},$$

also

$$\delta' h = \frac{1}{m s_0} \int_0^{\delta M_0} (\delta_1 h + \delta_2 h)\, d(\delta M) = \frac{1}{\delta M_0} \int_0^{\delta M_0} \delta h \cdot d(\delta M). \tag{19}$$

Man erhält also jetzt die durch eine gegebene Anzahl Zusatz-A.W. δM_0 hervorgebrachte Feldänderung $\delta' h$, indem man über die Ordinaten der oben ermittelten $\delta h(\delta M)$-Kurve in dem Intervall $\delta M = 0$ bis $\delta M = \delta M_0$ das arithmetische Mittel bildet; die $\delta' h(\delta M_0)$-Kurve ist die Mittelwertskurve der $\delta h(\delta M)$-Kurve. Diese Mittelwertskurve hat im großen und ganzen den gleichen Verlauf wie die Ausgangskurve; es ist nämlich für den ersten, parabolischen Teil der $\delta h(\delta M)$-Kurve

$$\delta' h(\delta M_0) = \frac{1}{3} \delta h(\delta M_0),$$

für den geradlinigen Teil in genügender Entfernung vom Anfangspunkte:

$$\delta' h(\delta M_0) = \frac{1}{2} \delta h(\delta M_0).$$

Die $\delta' h(\delta M_0)$-Kurve unterscheidet sich also von der $\delta h(\delta M)$-Kurve

nur durch eine für alle Punkte annähernd gleiche Änderung des Ordinatenmaßstabes.

Weiter hatten wir oben angenommen, die auf den verzweigten Teil des magnetischen Kreises entfallenden Feld-A.W. M' seien unabhängig vom Ankerstrom. Auch diese Annahme trifft nicht zu; in Wirklichkeit sind vielmehr die ganzen Feld-A.W. M konstant und es ist

$$M' = M - M''(h), \tag{20}$$

worin $M''(h)$ die auf den übrigen Teil des magnetischen Kreises der Maschine entfallenden A.W. bezeichnet, deren Zahl mit dem Induktionsfluß eindeutig verknüpft ist durch eine Magnetisierungskurve $h(M'')$. Was dadurch geändert wird, erkennt man aus der in Fig. 64 gezeichneten graphischen Lösung von Gl. (20). In ihr ist vom Ursprung O' aus nach rechts die Magnetisierungskurve $h(M')$ des verzweigten Teiles des magnetischen Kreises, von O'' aus nach links die Magnetisierungskurve $h(M'')$ des unverzweigten Teiles gezeichnet; die Strecke $O'O''$ ist gleich M. Dann ist die Lösung von Gl. (20) durch den Schnittpunkt P der beiden Kurven gegeben; die Ordinate von P gibt den Induktionsfluß für den Ankerstrom null. Durch das vom Ankerstrom erzeugte Querfeld wird h bei konstantem M' um den Betrag $\delta' h$ verkleinert, für einen bestimmten Ankerstrom J also die $h(M')$-Kurve um $\delta'(h)$ (das von h abhängig ist) tiefer gelegt (Kurve $h_1(M')$). Dadurch wird P verschoben nach P_1, dem Schnittpunkte der Kurve $h_1(M')$ mit $h(M'')$. Die wirkliche Feldschwächung Δh ist also gleich der Ordinatendifferenz von P und P_1 und verhält sich nach Fig. 64 bei kleinem $\delta' h$ zu $\delta' h$ annähernd wie $\frac{dh}{dM''}$ zu $\left(\frac{dh}{dM'} + \frac{dh}{dM''}\right)$; es ist also angenähert

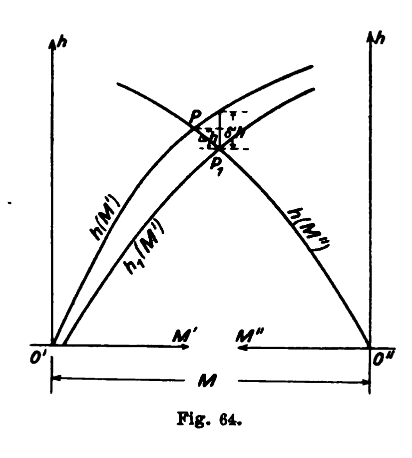


Fig. 64.

$$\Delta h = \delta' h \frac{\frac{dh}{dM''}}{\frac{dh}{dM'} + \frac{dh}{dM''}} = \frac{\delta' h}{1 + \frac{dh}{dM'} \Big/ \frac{dh}{dM''}}. \tag{21}$$

Durch den endlichen magnetischen Widerstand des Hauptkreises wird also prinzipiell nichts geändert, zu $\delta' h$ tritt nur der vom Ankerstrom unabhängige Faktor $\frac{1}{1+\frac{dh}{dM'}\Big/\frac{dh}{dM''}}$. Die Feldschwächung wird, da dieser Faktor stets kleiner als 1 ist, verringert; diese Verringerung ist um so größer, je kleiner $\frac{dh}{dM''}$ im Vergleich zu $\frac{dh}{dM'}$ ist, je größer also der magnetische Widerstand des Hauptkreises und seine Sättigung im Vergleich zu magnetischem Widerstande und Sättigung des verzweigten Teiles des magnetischen Kreises ist.

Das Resultat der letzten Betrachtung ist also das: die gesuchte $\Delta h(J)$-Kurve ist auch bei Berücksichtigung der gleichmäßigen Verteilung der Ankerdrähte über den Ankerumfang und des magnetischen Widerstandes des Hauptkreises bis auf den Maßstab identisch mit der durch die graphische Darstellung Fig. 63 ermittelten $\delta h(\delta M)$-Kurve.

Zusammenfassend können wir über die Feldänderung durch Quermagnetisierung sagen:

1. das Feld wird stets geschwächt;

2. die $h(J)$-Kurve ist nach unten konkav; sie verläuft bei kleinem J parabolisch, bei großem J geradlinig;

3. die Feldschwächung ist um so größer:
   a) je stärker gekrümmt und je steiler die Magnetisierungskurve der Ankerzähne ist,
   b) je enger der Luftspalt ist,
   c) je geringer magnetischer Widerstand und Sättigung von Polen und Joch sind.

c) Ankerrückwirkung durch Kurzschlußströme.

1. Maschinen ohne Wendepole. Da die Bürsten stets mindestens zwei, meist aber mehrere Kollektorlamellen kurzschließen, müssen in den zugehörigen Spulen durch ihre Bewegung im Magnetfelde Ströme induziert werden. Da die kurzgeschlossenen Spulen den magnetischen Kreis der Maschine vollständig umschließen, wirken die von ihnen erzeugten A.W. längsmagnetisierend; die Änderung des Hauptfeldes ist deshalb, wie oben (Fig. 60) gezeigt, nahezu proportional der Anzahl dieser Kurzschluß-A.W.

Letztere ist einmal proportional der Anzahl der gleichzeitig kurzgeschlossenen Spulen, wächst also annähernd proportional mit der Bürstenbreite; ferner proportional dem Kurzschlußstrom, der bei einer gegebenen Maschine umgekehrt proportional ist dem Widerstande des Kurzschlußstromkreises und proportional der Zahl der von den Drähten der kurzgeschlossenen Spulen pro Sekunde geschnittenen Kraftlinien, also proportional der Drehgeschwindigkeit ω und der in der Kommutierungszone normal zum Ankerumfang vorhandenen Feldstärke, kurz, dem Kommutierungs- oder Wendefelde. Da es uns hier nur auf die magnetische Wirkung des Ankerstromes ankommt, brauchen wir nur den vom Ankerstrom herrührenden Teil des Kommutierungsfeldes in Betracht zu ziehen; das bei einer Verschiebung der Bürsten aus der G.N.Z. hinzutretende konstante Kommutierungsfeld erzeugt bei konstanter Umdrehungszahl ω Kurzschlußströme konstanter Stärke, und somit eine vom Ankerstrom unabhängige Anderung des Hauptfeldes, wirkt also nur wie eine Änderung des Erregerstromes. Der vom Ankerstrom herrührende Anteil des Kommutierungsfeldes ist nahezu unabhängig von der Bürstenstellung und sehr nahe proportional dem Ankerstrom, also müssen auch die von den Kurzschlußströmen erzeugten längsmagnetisierenden A.W. proportional dem Ankerstrome sein. Über das Vorzeichen dieser A.W. bzw. der von ihnen hervorgebrachten Feldänderung gibt eine von Rosenberg[1]) stammende Überlegung Auskunft: Die Wirkung des von den Ankerspulen erzeugten Magnetfeldes läßt sich auch so beschreiben, daß man sagt: die Spulen besitzen Selbstinduktion. Diese Selbstinduktion widersetzt sich der Änderung des Stromes in den Spulen, sie bewirkt also, daß der Strom in den kurzgeschlossenen Spulen möglichst lange seine ursprüngliche Richtung und Stärke beizubehalten sucht; die Kommutation wird daher nicht in der durch die Bürstenmitte gehenden Ebene *ab* (Fig. 65; *BB* sind die Bürsten), sondern nahe der ablaufenden Bürstenkante,

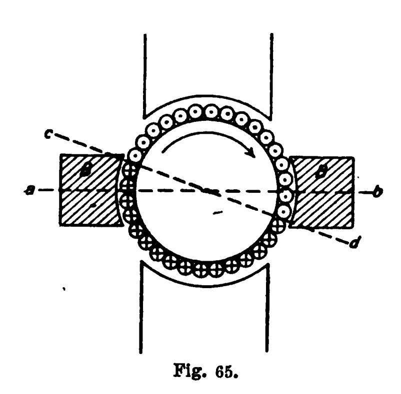


Fig. 65.

1) E. Rosenberg, Electrician 67, S. 670—673, 1911.

etwa in der Ebene *cd*, eintreten. Das vom Ankerstrom erzeugte Magnetfeld muß also eine verzögerte Kommutation hervorrufen; es wirkt auf die Stromverteilung so, als ob die Bürsten im Sinne der Drehrichtung (nach vorwärts) verschoben wären. Nach den Ergebnissen von Teil a) dieses Abschnittes (S. 209) wirken also die Kurzschlußströme beim Generator entmagnetisierend, beim Motor magnetisierend.

Nach der vorstehenden Überlegung könnte es scheinen, als ob die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme nur klein sein könnte, nämlich höchstens so groß wie diejenige einer Bürstenverschiebung um die halbe Bürstenbreite. Das wäre richtig, wenn auf jede kurzgeschlossene Spule nur ihr eigenes Feld wirkte (denn zu den Selbstinduktionserscheinungen trägt nur dieses Feld bei). In Wirklichkeit wirkt dagegen auf jede kurzgeschlossene Spule das Feld aller übrigen kurzgeschlossenen Spulen, welches die gleiche Richtung besitzt; daher kommt es, daß der Strom in diesen Spulen sehr viel größer werden kann als der Ankerstrom und Anlaß zu einer sehr beträchtlichen Ankerrückwirkung geben kann. In der Tat fand Pohl[1]), der zuerst die magnetischen Wirkungen der Kurzschlußströme systematisch untersuchte, daß bei einer Maschine ohne Wendepole bei Einstellung der Bürsten in die G.N.Z. fast die gesamte Ankerrückwirkung von den Kurzschlußströmen herrührte. Er zeigte das in der Weise, daß er das h der Maschine (E.M.K. dividiert durch Umdrehungsgeschwindigkeit ω) bei konstantem Ankerstrom als Funktion von ω bestimmte; da die Stärke der Kurzschlußströme proportional ω ist, ist das Magnetfeld h, das ohne Kurzschlußströme vorhanden wäre, gleich dem Grenzwerte von h für $\omega = 0$ und kann durch Extrapolation bestimmt werden. Auf diese Weise ließ sich die Wirkung der Kurzschlußströme von der übrigen Ankerrückwirkung trennen. Einfacher läßt sich diese Trennung in der Weise durchführen, daß man h bei verschiedenen Drehrichtungen, aber gleicher Drehgeschwindigkeit und gleicher Richtung und Stärke von Feld und Ankerstrom bestimmt, d. h. indem man die Maschine einmal als Generator, dann mit gleicher Stromverteilung und Drehgeschwindigkeit, aber in umgekehrter Drehrichtung als Motor laufen läßt. Dann müssen in beiden Fällen die magnetischen Wirkungen voll-

---

1) R. Pohl, Über magnetische Wirkungen der Kurzschlußströme in Gleichstromankern (Sammlung Voit, Bd. VI), Stuttgart 1905. S. 38 u. 39.

kommen die gleichen sein bis auf die von den Kurzschlußströmen herrührende Feldänderung, die ihr Vorzeichen umkehren muß. Das Feld, das ohne Kurzschlußströme bestehen würde, ergibt sich daher annähernd (wenn man nämlich von der Krümmung der Magnetisierungskurve absieht) als Mittel aus den bei den beiden Drehrichtungen beobachteten Feldwerten; die Abweichung der beiden Werte von ihrem Mittel gibt den Anteil der Kurzschlußströme an der Feldänderung.

Die $h(J)$-Kurven I und II in Fig. 66 stellen die Resultate einer solchen, für verschiedene Ankerströme ausgeführten Messung dar. Sie wurden aufgenommen an einem 3pferdigen Wendepolmotor für 220 Volt, 1300 Umdr. pro Min.; die Wendepolwicklung war ausgeschaltet. Der Erregerstrom wurde auf 0,25 Amp. eingestellt (der normale Wert war 0,6 Amp.); die Umdrehungszahl wurde durch Änderung der Klemmenspannung konstant auf 1500 Umdr. pro Min. gehalten. Die Bürsten wurden vorher genau in die G.N.Z. eingestellt, was daran erkannt wurde, daß die Maschine als Motor in beiden Drehrichtungen bei gleicher Klemmenspannung und gleicher Belastung (gleichem Ankerstrom) die gleiche Umlaufszahl annahm.

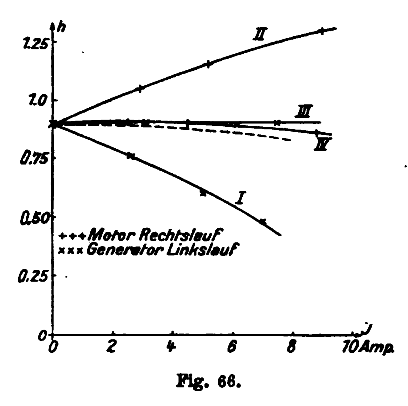


Fig. 66.

Die punktierte Kurve in Fig. 66 gibt das Mittel aus den beiden durch die Kurven I und II gegebenen Feldwerten; sie muß, weil wegen der Krümmung der Magnetisierungskurve die Feldverstärkung kleiner ist als die Feldschwächung bei gleicher Kurzschluß-AW.-Zahl, etwas tiefer liegen als die $h(J)$-Kurve, die man bei Abwesenheit der Kurzschlußströme erhalten würde. Man sieht aus Fig. 66, daß diese Mittelwertskurve nahezu horizontal verläuft, daß also die Ankerrückwirkung durch Quermagnetisierung, die hier (wegen der Einstellung der Bürsten in die G.N.Z.) noch allein in Frage kommen kann, sehr klein ist, also fast die ganze Ankerrückwirkung von den Kurzschlußströmen herrührt. Nun ist allerdings im vorliegenden Falle die Wirkung der Kurzschlußströme ganz erheblich stärker als bei normalen Maschinen ohne Wendepole, weil bei der untersuchten Maschine durch die

Wendepole der magnetische Widerstand des Ankerfeldes beträchtlich herabgesetzt wird, so daß sich das Ankerfeld gerade in der Kommutierungszone viel stärker ausbilden muß als bei einer Maschine ohne Wendepole. Trotzdem kann nach den Erfahrungen der Praxis Fig. 66 als Normalfall für Maschinen ohne Wendepole angesehen werden, insofern, als der von den Kurzschlußströmen herrührende Anteil der Ankerrückwirkung alle anderen Anteile überwiegt, sogar die durch etwaige Bürstenverschiebung hervorgerufene Längsmagnetisierung (wenigstens bei den praktisch vorkommenden Bürstenverschiebungen). Wir notieren deshalb als erstes Ergebnis: Bei Maschinen ohne Hilfswicklungen und Hilfspole rührt die Ankerrückwirkung fast ausschließlich von den Kurzschlußströmen her.

Da bei Motoren die Kurzschlußströme feldverstärkend wirken, so kann bei Motoren ohne Wendepole (und ohne Hilfswicklungen) eine Feldschwächung durch den Ankerstrom und somit ein Pendeln nicht auftreten; in der Tat ist bisher bei solchen Motoren ein Pendeln auch nicht beobachtet worden. Es erübrigt sich deshalb, auf die Abhängigkeit der Feldschwächung vom Ankerstrom näher einzugehen.

2. Maschinen mit Wendepolen. Die Wendepole erzeugen in der Kommutierungszone ein dem Ankerstrom annähernd proportionales, dem ursprünglichen Ankerfelde entgegengerichtetes Feld. Bei richtig bemessener Wendepolwicklung soll das Ankerfeld durch das Wendepolfeld gerade aufgehoben werden; das resultierende Feld, d. h. der gesamte längs der Wendezone in den Anker eintretende magnetische Fluß, wird also null und damit verschwinden auch die Kurzschlußströme. Daß die Wendepole in der Tat diese Wirkung haben, zeigen die $h(J)$-Kurven III und IV in Fig. 66, die in gleicher Weise aufgenommen wurden wie die Kurven I und II, aber mit eingeschalteter Wendepolwicklung. Man sieht, daß die vorher so starke Wirkung der Kurzschlußströme nicht nur verschwunden, sondern zum Teil umgekehrt worden ist, indem jetzt bei Generatorbetrieb geringe Feldverstärkung, bei Motorbetrieb Feldschwächung vorhanden ist. Das liegt daran, daß hier das Wendepolfeld etwas zu stark ist; die Richtung des resultierenden Feldes ist daher die entgegengesetzte wie die des ursprünglichen Ankerfeldes, und ebenso müssen Kurzschlußströme und Feldänderung entgegengesetztes Vorzeichen haben. Ist umgekehrt das Wendepolfeld zu schwach, so überwiegt das

Ankerfeld; resultierendes Wendefeld, Kurzschlußströme und Feldänderung haben dann das gleiche Vorzeichen wie bei Abwesenheit der Wendepole. Wir gelangen so zu folgendem Schema für das Vorzeichen der durch die Kurzschlußströme bewirkten Feldänderung:

	Generator	Motor
Wendepolfeld zu schwach .	—	+
Wendepolfeld richtig . . .	0	0
Wendepolfeld zu stark . .	+	—

Die Größe der durch die Kurzschlußströme hervorgebrachten Feldänderung ist, ebenso wie bei den Maschinen ohne Wendepole, annähernd proportional der Bürstenbreite, proportional der Umdrehungsgeschwindigkeit ω, proportional der Stärke des resultierenden Wendefeldes, umgekehrt proportional dem Widerstande des Kurzschlußstromkreises und umgekehrt proportional dem magnetischen Widerstande des Hauptkreises. Um letztere beiden Abhängigkeiten vorweg zu nehmen, so folgt aus der vorletzten, daß die Feldänderung um so größer ist, je kleiner der Übergangswiderstand der Bürsten ist; ferner verkleinern Widerstände, wie sie zur Verbesserung der Kommutation zuweilen in die Zuleitungen zu den Kollektorlamellen eingeschaltet werden, die Feldänderung. Aus der letzten der aufgeführten Abhängigkeiten folgt, daß die Feldänderung um so größer ist, je enger der Luftspalt und je weniger gesättigt das Eisen des Hauptkreises ist, je schwächer also das Hauptfeld erregt ist. Das resultierende Wendefeld erfordert eine besondere Betrachtung. Wie oben auseinandergesetzt, ist es bei richtig bemessener Wendepolwicklung null. Das Verschwinden des Wendefeldes würde sich auch für alle Betriebszustände erreichen lassen bei einer idealen Maschine, bei der die einzelnen Ankerleiter kein Streufeld (keine Selbstinduktion) besäßen, bei der sich ferner in der Wendezone die Wendepole längs des ganzen Ankers (auch über die Stirnflächen) ausdehnten und deren Wendepolwicklung so angeordnet wäre, daß auf jede Stelle des Luftspaltes von ihr genau so viele A.W. wirkten wie von der Ankerwicklung. Denn dann würden sich die A.W. an jeder Stelle des Luftspaltes aufheben, das resultierende Wendefeld müßte daher unabhängig vom magnetischen Widerstande, also auch unabhängig von Eisensättigung, für jeden beliebigen Ankerstrom verschwinden, durch die Wendepole und die ihnen gegenüberliegenden Stellen des

Ankers würde überhaupt kein Induktionsfluß treten (Wendepole wären dann überflüssig, es genügte, die Wicklung allein anzubringen). Eine solche ideale Konstruktion ist aber unausführbar, vielmehr kann man in Wirklichkeit die Wendepole nur längs eines Teiles des Ankers anbringen; daher muß, um die an den übrigen Teilen des Ankers in der Wendezone (namentlich an den Stirnflächen) austretenden Kraftlinien, sowie das Streufeld der einzelnen Ankerleiter zu kompensieren, die Wendepolwicklung so stark gewählt werden, daß aus den Wendepolen ein erheblicher Induktionsfluß in der dem Ankerfelde entgegengesetzten Richtung in den Anker eintritt. Das hat zweierlei zur Folge:

Erstens ist der Fluß unter den ziemlich schmalen Wendepolen nicht gleichmäßig verteilt, sondern er ist am stärksten unter der Polmitte und nimmt längs des Ankerumfangs nach beiden Seiten ab. Daher muß das resultierende Wendefeld und damit Kurzschlußströme und Feldänderung von der Bürstenstellung abhängen: die Wirkung der Wendepole ist am größten, wenn die Kommutierungszone genau unter der Mitte der Wendepole liegt, d. h. wenn die Bürsten genau in der G.N.Z. stehen; bei dieser Bürstenstellung muß also eine etwa vorhandene Feldschwächung am größten, eine Feldverstärkung am kleinsten ausfallen.

Zweitens verläuft jener aus den Wendepolen in den Anker eintretende Fluß (kurz, das Wendepolfeld) hauptsächlich in Eisen (Anker, Wendepole, Joch); bei ihm muß sich daher die magnetische Sättigung erheblich bemerkbar machen, so daß das Wendepolfeld eine andere Abhängigkeit von Ankerstrom und Feldstrom zeigt als das Ankerfeld, dessen Kraftlinien hauptsächlich in Luft verlaufen; Ankerfeld und Wendepolfeld können sich daher, wenn sie sich auch für einen bestimmten Betriebszustand aufheben, nicht mehr für alle Betriebszustände kompensieren. Im einzelnen wirkt die Sättigung von Anker und Joch, die im wesentlichen durch das Hauptfeld hervorgerufen wird, so, daß bei starker Erregung des Hauptfeldes das Wendepolfeld schwächer ist als bei geringer Erregung. Ist also die Wendepolwicklung für eine bestimmte Erregung des Hauptfeldes richtig bemessen (so daß das resultierende Wendefeld null ist), so wird das Wendepolfeld bei stärkerer Erregung zu schwach, bei geringerer Erregung zu stark sein; im ersteren Falle tritt ein feldverstärkender, im zweiten ein feldschwächender Kurzschlußstrom auf. Ähnlich wirkt die Sättigung der Wendepole; sie hat zur Folge, daß das Wendepolfeld mit

zunehmender Ankerstromstärke langsamer als proportional ansteigt, während das entgegenwirkende Ankerfeld, das, wie gesagt, im wesentlichen in Luft verläuft, sehr nahe proportional dem Ankerstrom ist. Heben sich also für einen bestimmten Ankerstrom die beiden Felder gerade auf, so muß für kleineren Ankerstrom das Wendepolfeld, für größeren das Ankerfeld überwiegen, und dementsprechend im ersteren Falle ein feldschwächender, im zweiten ein feldverstärkender Kurzschlußstrom auftreten. Graphisch[1]) erhält man das resultierende Wendefeld, indem man die Ordinaten der Magnetisierungskurve des Wendepolkreises von den Ordinaten derjenigen geraden Linie abzieht, welche das Ankerfeld als Funktion des Ankerstromes darstellt. Da dem resultierenden Wendefeld der Kurzschlußstrom und die von ihm hervorgerufene Feldänderung Δh proportional ist, so erhält man durch die gleiche Konstruktion bis auf den Maßstab auch die $\Delta h(J)$-Kurve und durch Verlegung des Koordinatennullpunktes auch die $h(J)$-Kurve. Diese Konstruktion ist in Fig. 67 für verschieden stark erregte Wendepole durchgeführt. Als Abszissenachse betrachte man zunächst $O'P'$; die gerade Linie $O'A$ (gestrichelt) gibt das Ankerfeld, die gestrichelten Magnetisierungskurven $1'$, $2'$, $3'$ das entgegengerichtete Wendepolfeld als Funktion des Ankerstromes J an. Die Gerade $O'A'$ ist das Spiegelbild von $O'A$; die Ordinaten der Kurven $1'$, $2'$, $3'$, von dieser Geraden an gerechnet, sind gleich den gesuchten Ordinatendifferenzen, geben also das resultierende Wendefeld an. Die ausgezogenen Kurven 1, 2, 3 stellen dieses resultierende Wendefeld in rechtwinkligen Koordinaten dar; mit anderem Ordinatenmaßstabe geben sie, wie oben gezeigt, die Feldänderung Δh an, und wenn man die Abszissenachse um das Stück H (Feldwert beim Ankerstrom null) nach unten in die Lage OP verschiebt, so werden die Kurven 1, 2, 3 identisch mit den gesuchten $h(J)$-Kurven. Kurve 1 entspricht einer richtig bemessenen Wendepolwicklung: Bei einer mittleren Ankerstromstärke J_0 ist die Feldänderung null, für kleineren Ankerstrom ist Feldschwächung, für größeren Feldverstärkung vorhanden. Da das Wendepolfeld von der Erregung des Hauptkreises abhängt, so wählt man zweckmäßig die Wendepolwicklung so, daß sie für eine mittlere Erregung des Hauptfeldes richtig bemessen ist, also eine $h(J)$-Kurve vom Typus der Kurve 1 ergibt. Dann wird bei

---

1) E. Rosenberg, l. c.

stark gesättigtem Hauptfeld (oder bei zu schwacher Wendepolwicklung) das Wendepolfeld im Durchschnitt zu schwach (Kurve 2′); die entsprechende $h(J)$-Kurve 2 muß dann oberhalb der Kurve 1 liegen. Umgekehrt wird bei schwacher Erregung des Hauptfeldes das Wendepolfeld durchschnittlich zu stark (Kurve 3′), so daß die $h(J)$-Kurve unterhalb 1 zu liegen kommt. Die entsprechenden $h(J)$-Kurven für den Generator, bei dem cet. par. die gleiche Feldänderung, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, auftreten muß, erhält man, indem man die $h(J)$-Kurven der Fig. 67 um die Achse $O'P'$ umklappt.

Fig. 67 zeigt, daß beim Motor die $h(J)$-Kurve stets nach unten konvex ist; h' ist um so stärker negativ, je geringer der Ankerstrom und je schwächer das Hauptfeld erregt ist.

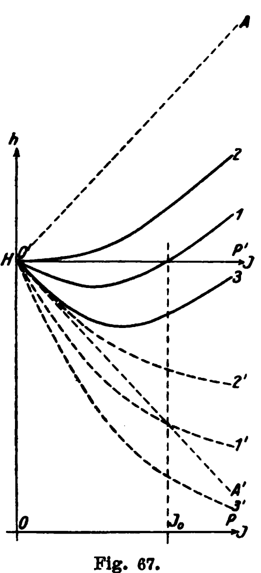


Fig. 67.

Die Krümmung der $h(J)$-Kurve, sowie ihre Verschiebung bei Änderung des Hauptfeldes und die damit verbundenen Nachteile (großer negativer Wert von $-h'$) sind um so größer, je größer der Einfluß der Eisensättigung auf die Größe des Wendepolflusses ist. Dieser Einfluß ist um so stärker, erstens ein je größerer Teil des Kraftlinienweges im Eisen verläuft, je enger also der Luftspalt zwischen Wendepolen und Anker ist, und zweitens, je größer die maximale Kraftliniendichte im Eisen ist. Es ist deshalb anzustreben, einerseits die Liniendichte in Anker und Joch, die durch das Hauptfeld bestimmt ist, möglichst klein zu machen, d. h. die Querschnitte dieser Teile möglichst groß zu wählen; andererseits die Liniendichte in den Wendepolen, die nur vom Wendepolfeld herrührt, möglichst klein zu machen. Letzteres läßt sich nicht etwa durch Verbreitern der Wendepole in Richtung des Ankerumfangs erreichen, weil die erforderliche Liniendichte in den Wendepolen unabhängig von ihrer Breite ist. Denn die Liniendichte unter den Wendepolen soll so bemessen sein, daß die gesamte Anzahl der Linien, die aus einem symmetrisch zur neutralen Zone gelegenen Längsstreifen der Ankeroberfläche austreten, null ist (man denke sich den Streifen aus der Ankeroberfläche etwa durch

zwei die Drehachse des Ankers enthaltende Ebenen herausgeschnitten; der Streifen besteht dann aus einem rechteckigen Stück der äußeren, zylindrischen Ankerfläche und je einem sektorförmigen Stück der beiden Stirnflächen); längs dieses Streifens sollen also aus den Wendepolen in den Anker ebenso viele Linien eintreten, wie an den freien Stellen des Ankers austreten. Die Breite des Streifens ist gleichgültig, solange man ihn nur so schmal wählt, daß in ihm die Dichte des Wendepolflusses in der Querrichtung sich nicht ändert; denn nimmt man den Streifen z. B. doppelt so breit, so verdoppelt sich sowohl der aus dem Anker austretende als auch der aus den Wendepolen in ihn eintretende Fluß, beide heben sich also bei richtiger Stärke des Wendepolfeldes nach wie vor auf. Die erforderliche Liniendichte in den Wendepolen kann daher nur durch Vergrößerung ihrer axialen Ausdehnung herabsetzt werden; man sollte deshalb die Wendepole möglichst lang, d. h. ebenso lang wie den Anker machen. Ferner muß die Liniendichte in den Wendepolen um so größer sein, je größer ihre Streuung ist. Aus diesem Grunde darf der Wendepolluftspalt, für den oben große Weite als günstig gefunden wurde, auch nicht zu weit gewählt werden; eine gewisse mittlere Weite dürfte am günstigsten sein[1]. Im übrigen hängt die erforderliche Induktionsliniendichte in den Wendepolen nur noch von der Stärke des Ankerfeldes in der G.N.Z. ab, und zwar ist sie ihm proportional; das Ankerfeld ist seinerseits proportional der Anker-A.W.-Zahl pro Pol JN/p (p ist die Polzahl) und umgekehrt proportional der Länge des Ankerkraftlinienweges, die wir, da nur der Luftweg in Betracht kommt, annähernd gleich dem zwischen benachbarten Polen liegenden Teile des Ankerumfangs U, also gleich U/p setzen können. Die Stärke des Ankerfeldes ist also proportional zu

$$\frac{JN}{p} \Big/ \frac{U}{p} = \frac{JN}{U},$$

d. i. der auf 1 cm Ankerumfang entfallenden Anker-A.W.-Zahl, oder der „linearen Strombelastung“ des Ankers (Arnold); dieser Größe ist also auch die erforderliche Liniendichte in den Wendepolen proportional.

Die Größe JN/U läßt sich in Beziehung setzen zur Wärme-

---

1) Rosenberg (a. a. O.), der nur den Einfluß der Streuung berücksichtigt, hält möglichst engen Luftspalt für günstig.

entwicklung im Anker: Es ist nämlich die pro cm Ankerumfang entwickelte Joulesche Wärme $=\frac{J^2 W}{U}$; der Widerstand $\frac{W}{U}$ des auf 1 cm Ankerumfang entfallenden Bruchteils der Ankerwicklung ist bei gleichem Wicklungsvolumen, d. i. bei gleicher Nutentiefe, proportional dem Quadrate der Windungszahl $\frac{N}{U}$ dieses Bruchteils und proportional der Ankerlänge l; wir erhalten so, wenn C eine Konstante ist:

$$\frac{J^2 W}{U} = \frac{C J^2 N^2}{U^2} \cdot l;$$

oder, da $U \cdot l$ gleich der Ankeroberfläche O ist:

$$\frac{J^2 W}{O} = C\left(\frac{JN}{U}\right)^2,$$

$$\frac{JN}{U} = \frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{J^2 W}{O}}, \tag{22}$$

d. h. die Größe $\frac{JN}{U}$ und damit die erforderliche Induktionsliniendichte in den Wendepolen ist proportional der Wurzel aus der pro qcm Ankeroberfläche entwickelten Wärme. Diese selbe Größe ist auch maßgebend für die Temperatur des Ankers; und da die Belastungsgrenze einer Maschine im allgemeinen durch die Temperaturerhöhung bestimmt wird, folgt, daß die Anzahl A.W. pro cm Ankerumfang bei normalen Maschinen, bei denen die Nutentiefe ziemlich konstant ist, nicht sehr variiert. Nur bei Maschinen mit besonders energischer Kühlung (durch Ventilatoren) ist eine wesentlich größere Wärmeentwicklung pro qcm Ankeroberfläche zulässig; bei solchen Maschinen ist daher am leichtesten ein störender Einfluß der Wendepolsättigung zu erwarten.

Fassen wir zusammen: Eine durch Kurzschlußströme hervorgerufene Feldschwächung ist bei einer gegebenen, richtig berechneten Maschine um so größer:

je größer die Bürstenbreite,
je kleiner der Übergangswiderstand der Bürsten,
je größer die Umdrehungszahl,
je enger der Luftspalt zwischen Hauptpolen und Anker,
je enger der Luftspalt zwischen Wendepolen und Anker ist (wenigstens so lange die Streuung der Wendepole klein ist),
je genauer die Bürsten in der G.N.Z. stehen,

je schwächer das Hauptfeld,

je kleiner der Ankerstrom (d. h. die Belastung),

je größer die Sättigung von Anker und Joch bei voller Erregung des Hauptfeldes ist,

je größer die Sättigung der Wendepole bei vollem Ankerstrom ist, d. h. je geringer die Ausdehnung der Wendepole in axialer Richtung und je größer die Anzahl der Anker-A.W. pro cm Ankerumfang oder die Wärmeentwicklung pro qcm Ankeroberfläche ist.

H. Verhalten eines instabilen Motors. Im Abschnitt F sahen wir, daß Pendelungen nur auftreten können, wenn h' negativ ist und sein Betrag oberhalb einer gewissen Grenze liegt. Ferner sahen wir oben, daß bei Motoren ohne Wendepole die starke, von den Kurzschlußströmen herrührende Felderhöhung ein negatives h' ausschließt; es bleiben also nur noch Wendepolmotore zu betrachten. Hier kann, entsprechend der Einteilung des vorigen Abschnitts, ein negatives h' aus 3 Ursachen auftreten, nämlich:

1. infolge von längsmagnetisierenden A.W. des Ankerstromes, also entweder bei Vorhandensein einer feldschwächenden Compoundwicklung — dieser Fall kommt aber praktisch nicht vor, weil bei Motoren nur feldverstärkende Compoundwicklungen verwendet werden — oder bei einer Bürstenverschiebung nach rückwärts;
2. infolge von quermagnetisierenden A.W.;
3. infolge von Kurzschlußströmen.

Diese drei Fälle unterscheiden sich ganz wesentlich durch den Verlauf der $h(J)$-Kurven: Im Falle der Feldschwächung durch Quermagnetisierung ist die $h(J)$-Kurve nach unten konkav, im Falle der Feldschwächung durch Bürstenverschiebung oder durch Kurzschlußströme nach unten konvex. Hieraus folgt einmal eine verschiedenartige Abhängigkeit der Pendelungsgefahr von der Belastung, andererseits ein verschiedenes Verhalten in Bezug auf die Stabilität des Schwingungszustandes.

a) Einfluß der Belastung auf die Stabilität.

Wir sahen oben, daß bei geradliniger oder nach unten konkaver $h(J)$-Kurve ($h'' \leq 0$) die Pendelungsgefahr mit wachsender Belastung zunimmt, im andern Fall ($h'' > 0$) abnimmt. Es ergibt sich also:

Falls die Pendelungen nur infolge zu starken Querfeldes auftreten, nimmt die Pendelungsgefahr mit wachsender Belastung des Motors zu; und

falls die Pendelungen durch Bürstenverschiebung oder durch Kurzschlußströme hervorgerufen werden, nimmt die Pendelungsgefahr mit wachsender Belastung ab.

Im allgemeinen Fall wirken die drei Ursachen, oder wenigstens zwei von ihnen (Querfeld und Kurzschlußströme) gleichzeitig; dann hat die $h(J)$-Kurve einen komplizierteren Verlauf. Wie dann die Pendelungsgefahr von der Belastung abhängt, erkennt man am besten, wenn man die Kurve zeichnet, welche h' als Funktion von J darstellt. h' setzt sich ebenso wie h additiv zusammen aus den vom Querfelde und den von Bürstenverschiebung und Kurzschlußströmen herrührenden Beträgen. Diese sind einzeln durch die Kurven h'_1 und h'_2, Fig. 68a und b, dargestellt. Die der Feldschwächung durch Quermagnetisierung entsprechende Kurve h'_1 wurde erhalten durch Differentiation der in der Anm. zu S. 213/214 aufgestellten Gleichung (16); man erhält

$$h'_1 = -\frac{a^2 J}{\sqrt{b^2 + a^2 J^2}}.$$

In den beiden andern Fällen (Bürstenverschiebung und Kurzschlußströme) hat die $h'(J)$-Kurve den gleichen, durch die Kurven h'_2 dargestellten Verlauf; sie ist nämlich in beiden Fällen die Differentialkurve einer Magnetisierungskurve. Denn im Falle der Bürstenverschiebung ist h bis auf eine additive Konstante durch die Magnetisierungskurve der Wendepole (mit negativ gerechneten Ordinaten) gegeben; im Falle der Kurzschlußströme nach Fig. 67 bis auf eine additive Konstante und ein dem Ankerstrom J proportionales additives Glied durch die gleiche Magnetisierungskurve; also ist h'_2 im ersteren Falle direkt, im zweiten bis auf eine additive Konstante, die nur eine Parallelverschiebung der resultierenden $h'(J)$-Kurve hervorruft, durch die Differentialkurve dieser Magnetisierungskurve mit negativem Vorzeichen gegeben. h'_2 ist dauernd negativ; die $h'_2(J)$-Kurve hat im Nullpunkte ein negatives Maximum (horizontale Tangente), weil dort die Magnetisierungskurve einen Wendepunkt besitzt; mit zunehmendem Ankerstrom steigt sie an, der Anstieg wächst mit zunehmendem Ankerstrom bis zu einem Wendepunkt, der dem Maximum von h'' unterhalb des Knies der Magnetisierungskurve entspricht, und nimmt dann all-

mählich bis auf null ab, wobei h'_2 sich asymptotisch einem negativen Grenzwerte nähert. Beide Kurven h'_1 und h'_2 sind vom Nullpunkte an bis zum Wendepunkte von h'_2, d. h. bis etwa zum Knie der Wendepolmagnetisierungskurve, nach unten konvex, also auch die durch Addition beider erhaltene $h'(J)$-Kurve. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Überwiegender Einfluß des Querfeldes (Fig. 68a): Ist die Wirkung der Kurzschlußströme oder der Bürstenverschiebung so gering, daß der Anstieg der Kurve h'_2 überall kleiner ist als der Abfall der Kurve h'_1, so fällt die resultierende Kurve h' dauernd ab; h' ist also um so stärker negativ, d. h. die Pendel-

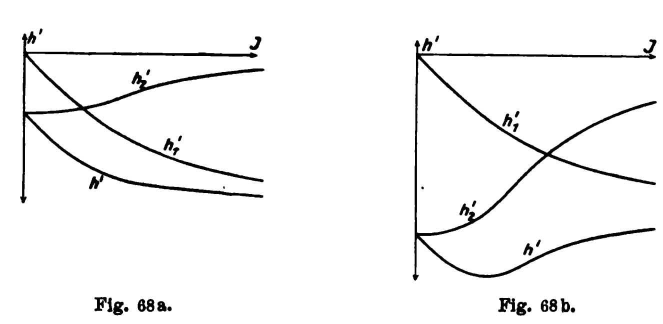


Fig. 68a. Fig. 68b.

gefahr ist um so größer, je größer der Ankerstrom J (d. h. die Belastung) ist.

2. Überwiegender Einfluß der Bürstenverschiebung oder der Kurzschlußströme (Fig. 68b): Bei stärkerer Wirkung der Kurzschlußströme oder der Bürstenverschiebung steigt h' in der Nähe des Wendepunktes der $h'_2(J)$-Kurve an; da h' im Punkte $J = 0$ stets abfällt, so muß zwischen diesen beiden Punkten bei einer bestimmten („kritischen") Belastung ein Minimum von h' d. h. ein Maximum von $-h'$ und damit ein Maximum der Pendelgefahr liegen. Dieses Maximum liegt um so weiter nach links, die kritische Belastung ist also um so kleiner, je mehr der Einfluß der Kurzschlußströme oder der Bürstenverschiebung den des Querfeldes überwiegt.

b) Stabilität der Pendelungen.

Eine zweite Folge des verschiedenartigen Verlaufs der $h(J)$-Kurve in den drei Fällen ist die verschiedene Stabilität des Schwingungszustandes. Zu einer Voraussage über diese Stabilität

können wir auf Grund der in § 12Bd (S. 123) angestellten Überlegungen gelangen. Dort fanden wir als Kriterium für die Stabilität der Schwingungen, daß der Mittelwert der Dämpfungskonstante $\delta = \frac{a_1}{2}$, erstreckt über eine Periode, mit zunehmender Amplitude größer werden muß. Wir wollen deshalb diesen Mittelwert zu ermitteln suchen. Streng genommen müßten wir uns dazu der Formel (17a), S. 121 bedienen. Da aber, wie weiter unten ausgeführt, diese Stabilitätsbetrachtung aus anderen Gründen nicht streng ist, wollen wir uns damit begnügen, statt dessen den arithmetischen Mittelwert zu bilden, wie wir es schon bei einer früheren, ähnlichen Gelegenheit taten (S. 139). Ist J_0 der Gleichgewichtswert des Stromes, A seine Schwingungsamplitude, so ist dieser Mittelwert definiert durch

$$\bar{\delta} = \frac{1}{2A} \int_{J_0 - A}^{J_0 + A} \delta \cdot dJ. \tag{23}$$

Man ermittelt ihn graphisch in bekannter Weise, indem man die Kurve zeichnet, die δ als Funktion von J darstellt (die $\delta(J)$-Kurve, Fig. 69) und eine Parallele zur Abszissenachse so zieht, daß die beiden von dieser Parallelen, den Grenzordinaten des Schwingungsintervalls und der $\delta(J)$-Kurve begrenzten dreieckförmigen Flächenstücke *ace* und *edb* (in Fig. 69 schraffiert) inhaltsgleich werden. Der Abstand dieser Parallelen von der Abszissenachse ist dann gleich dem gesuchten Mittelwerte $\bar{\delta}$. Die unmittelbare geometrische Anschauung zeigt, daß dieser Mittelwert bei nach unten konkaver $\delta(J)$-Kurve kleiner, bei nach unten konvexer $\delta(J)$-Kurve größer ist als der Gleichgewichtswert δ_0, daß also die mit wachsender Amplitude A eintretende Änderung von $\bar{\delta}$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\frac{d^2\delta}{dJ^2}$.

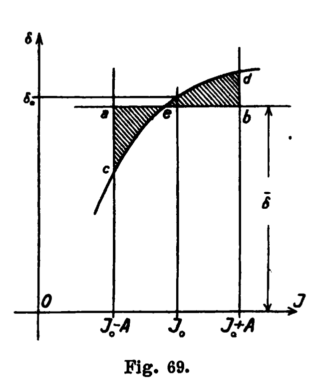


Fig. 69.

Dasselbe läßt sich auch analytisch nachweisen. Wir entwickeln dazu $\delta(J)$ nach dem Taylor schen Satze nach Potenzen von $J_1 = J - J_0$:

$$\delta(J) = \delta(J_0) + \delta'(J_0) J_1 + \frac{\delta''(J_0)}{2!} J_1^{\,2} + \frac{\delta'''(J_0)}{3!} J_1^{\,3} + \cdots$$

Die Mittelwertformel (23) schreiben wir zweckmäßiger, indem wir J_1 statt J einführen:

$$\overline{\delta} = \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} \delta \cdot dJ_1 .$$

Darin die Reihenentwicklung für δ eingesetzt, gibt:

$$\overline{\delta} = \delta(J_0) + \frac{1}{2A} \left\{ \delta' \int_{-A}^{+A} J_1 \, dJ_1 + \frac{\delta''}{2!} \int_{-A}^{+A} J_1^{\,2} dJ_1 + \frac{\delta'''}{3!} \int_{-A}^{+A} J_1^{\,3} dJ_1 + \cdots \right\}$$

$$= \delta_0 + \frac{1}{2A} \left[\delta' \frac{J_1^{\,2}}{2} + \frac{\delta''}{2!} \frac{J_1^{\,3}}{3} + \frac{\delta'''}{3!} \frac{J_1^{\,4}}{4} + \cdots \right]_{-A}^{+A} .$$

Alle Glieder mit geraden Potenzen von J_1 haben für beide Grenzen denselben Wert, heben sich also fort; es bleibt:

$$\overline{\delta} = \delta_0 + \frac{\delta''}{3!} A^2 + \frac{\delta^{(4)}}{5!} A^4 + \cdots\cdots$$

Beschränken wir uns auf so kleine Amplituden, daß die Glieder der Taylorschen Reihenentwicklung vom fünften ab vernachlässigt werden können, so wird

$$\frac{d\overline{\delta}}{d(A^2)} = \frac{\delta''(J)}{3!} \tag{24}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der graphischen Untersuchung.

Nach Gl. (14) ist

$$\delta = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2L\left(1 + \frac{W}{R}\right)} \left(\omega_0 h' + W + \frac{h^2}{\Theta} \frac{L}{R} \right), \tag{14'}$$

$\left(\text{das Glied } \frac{m'}{\Theta} \text{ ist wieder vernachlässigt}\right)$; hiervon ist der zweite Differentialquotient nach J zu bilden und in Gl. (24) einzusetzen. Da in Gl. (14′) nur h' und h von J abhängen, erhält man:

$$\frac{d\overline{\delta}}{d(A^2)} = \frac{1}{6} \frac{d^2\delta}{dJ^2} = \frac{1}{12L\left(1 + \frac{W}{R}\right)} \left(\omega_0 h''' + \frac{2}{\Theta} \frac{L}{R} [h h'' + h'^2] \right)$$

$$= \frac{\omega_0}{12L\left(1+\frac{W}{R}\right)}\left(h''' + 2\frac{m}{\Theta\omega_0}\frac{L}{R}\left[\frac{h''}{J_0} + \frac{h'}{J_0{}^2}\frac{h'}{h/J_0}\right]\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{12L\left(1+\frac{W}{R}\right)}\left(h''' + 2\frac{T_W}{T_M}\frac{h''}{J_0} + 2\frac{T_W}{T_M}\frac{h'}{J_0{}^2}\frac{h'}{h/J_0}\right). \qquad (25)$$

Der Schwingungszustand ist stabil, wenn $\frac{d\overline{\delta}}{d(A^2)}$ positiv ist. Die Stabilität der Schwingungen ist demnach durch das Vorzeichen von h''' und h'' bestimmt. Das letzte Glied in der Klammer rechts ist wegen h'^2 stets positiv, wirkt also stabilisierend; es ist aber praktisch zu vernachlässigen, weil an der Grenze der Stabilität für $\frac{h'}{h/J_0}$ durch die Stabilitätsbedingung (14c) ein kleiner Betrag vorgeschrieben ist.

Wenden wir diese Ergebnisse auf unsere $h(J)$-Kurven an, so ergibt sich:

a) Das Vorzeichen von h'' war auch entscheidend für die Beantwortung der Frage, ob die Pendelgefahr mit wachsender Belastung zu- oder abnimmt und ist im Zusammenhang mit dieser Frage schon oben untersucht worden. Es ergibt sich somit: Das Glied $2\frac{T_W}{T_M}\frac{h''}{J_0}$ in Gl. (25) bewirkt in dem Falle, daß die Pendelgefahr mit wachsender Belastung zunimmt (bei überwiegendem Einfluß der Quermagnetisierung, sowie in den anderen Fällen, falls die Belastung unterhalb der „kritischen" liegt), L a b i l i t ä t des Schwingungszustandes; nimmt die Pendelgefahr mit wachsender Belastung ab (bei überwiegendem Einfluß von Bürstenverschiebung oder Kurzschlußströmen, falls die Belastung oberhalb der „kritischen" liegt), bewirkt es S t a b i l i t ä t der Pendelungen; beim Maximum der Pendelgefahr ist es einflußlos.

b) h''' ist die zweite Ableitung von h', also durch das Vorzeichen der Krümmung der $h'(J)$-Kurve (Fig. 68a und b) bestimmt; h''' ist positiv, wenn die $h'(J)$-Kurve nach unten konvex ist und umgekehrt. Nun ist nach Fig. 68a und b die $h'(J)$-Kurve bei überwiegender Quermagnetisierung s t e t s, bei überwiegender Längsmagnetisierung oder Kurzschlußströmen im Falle größter Pendelgefahr nach unten konvex. Im allgemeinen bewirkt also das Glied h''' in Gl. (25) S t a b i l i t ä t des Schwingungszustandes. Der Einfluß dieses Gliedes ist im Falle überwiegenden Einflusses der Quer-

magnetisierung, entsprechend der geringen Krümmung der $h'(J)$-Kurve in Fig. 68a, klein, in den anderen Fällen (Fig. 68b) ziemlich beträchtlich.

c) Einen dritten Umstand, der die Stabilität der Schwingungen beeinflußt, haben wir schon früher (S. 201) besprochen; es ist die Eisenhysteresis, die, wie dort gezeigt wurde, in allen Fällen eine Neigung zur Labilität verursacht.

Das Zusammenwirken der drei Einflüsse (a, b, c) ergibt folgendes Bild: Im Falle des Querfeldes bewirken das Glied $2\frac{h''}{J_0}\frac{T_W}{T_M}$ in Gl. (25) und die Eisenhysteresis Labilität des Schwingungszustandes; der geringe stabilisierende Einfluß des Gliedes h''' kommt nicht in Betracht. Im Falle überwiegenden Einflusses von Bürstenverschiebung oder Kurzschlußströmen ist in der Nähe des Maximums der Pendelgefahr das Glied $2\frac{h''}{J_0}\frac{T_W}{T_M}$ ohne Einfluß, das Glied h''' wirkt stark stabilisierend, so daß hier im allgemeinen trotz des entgegengesetzten Einflusses der Eisenhysteresis Stabilität der Pendelungen zu erwarten ist.

Dieses Resultat scheint durch die vorliegenden Beobachtungen bestätigt zu werden: In dem von uns untersuchten Falle (Abschnitt D dieses Paragraphen, S. 194), bei dem der Verlauf der $h(J)$-Kurve (Fig. 57) auf einen überwiegenden Einfluß des Querfeldes hindeutet, und bei dem auch starke Zunahme des Pendelns mit zunehmender Belastung beobachtet wurde, waren die Pendelungen labil, während bei fast allen anderen, in der Literatur angeführten Fällen stabile Schwingungen beobachtet wurden; in diesen Fällen waren die Pendelungen meistens durch starke Rückwärtsverschiebung der Bürsten künstlich hervorgerufen.

Es sei jedoch betont, daß diese ganze Stabilitätsbetrachtung keineswegs streng ist. Zwar ist es nach § 12Bc wohl erlaubt, bei Schwingungen endlicher Amplitude einen Mittelwert der Dämpfungskonstante einzuführen; aber ganz abgesehen davon, daß wir den Mittelwert in recht willkürlicher Weise gebildet haben, ist es gar nicht gesagt, daß die Schwingungen symmetrisch um die Gleichgewichtslage stattfinden, wie wir angenommen haben. Es ist sehr wohl möglich, daß der beobachtete auffallende Unterschied in der Stabilität des Schwingungszustandes in den drei Fällen noch andere Ursachen hat, Ursachen, die erst aufgefunden werden könnten, wenn es gelänge, die Schwingungsdifferentialgleichung

auch für endliche Amplituden streng zu integrieren. Das Vorhandensein solcher weiterer Ursachen ist um so eher möglich, als der Bau der Differentialgleichung im Falle des Auftretens von Kurzschlußströmen ein anderer ist als in den beiden übrigen Fällen. Denn die Feldschwächung durch Kurzschlußströme ist proportional der Umdrehungsgeschwindigkeit ω, h hängt somit in dem Falle, daß Kurzschlußströme erheblich an der Ankerrückwirkung beteiligt sind, nicht nur von J, sondern auch von ω ab, während in den übrigen Fällen h unabhängig von ω ist.

Diese Abhängigkeit des h von ω muß natürlich auch bei der Ableitung der Stabilitätsbedingungen berücksichtigt werden. Es möge genügen, diese Ableitung ohne Berücksichtigung der Wirbelströme durchzuführen; wir sahen ja oben, daß die Wirbelströme qualitativ nichts ändern. Wir setzen dazu in Gl. (3) und (4) dieses Paragraphen $h(J, \omega)$ statt $h(J)$; die partiellen Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial J}$ und $\frac{\partial h}{\partial \omega}$ schreiben wir zur Abkürzung h_J und h_ω.

Dann gehen die Gleichungen (3b) und (4b) über in:

$$0 = \omega_1 (h + \omega_0 h_\omega) + J_1 (\omega_0 h_J + W) + \frac{dJ_1}{dt} \cdot L, \tag{3b'}$$

$$\Theta \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1 (m' - J_0 h_\omega) = J_1 (h + J_0 h_J), \tag{4b'}$$

und man erhält als Stabilitätsbedingungen:

$$a_1 = \frac{m' - J_0 h_\omega}{\Theta} + \frac{\omega_0 h_J + W}{L} > 0, \tag{6'}$$

$$a_2 = \frac{(h + \omega_0 h_\omega)(h + J_0 h_J) + (m' - J_0 h_\omega)(\omega_0 h_J + W)}{\Theta L} > 0. \tag{7'}$$

Diese unterscheiden sich von den ursprünglichen Stabilitätsbedingungen (6) und (7) nur dadurch, daß statt m' der Ausdruck $m' - J_0 h_\omega$ steht, sowie daß in der zweiten Gleichung das erste h durch $h + \omega_0 h_\omega$ ersetzt ist. Diese Unterschiede sind aber sehr geringfügig. Denn im ungünstigsten Falle, wenn nämlich die g a n z e Feldänderung δh von den Kurzschlußströmen herrührt, ist diese der Umdrehungsgeschwindigkeit ω proportional:

$$h = h_0 + \delta h = h_0 - \omega f(J),$$

also

$$h_\omega = - f(J),$$

$$\omega_0 h_\omega = - \omega_0 f(J) = \delta h << h.$$

Das Glied $\omega_0 h_\omega$ ist also höchstens gleich der Feldänderung gegenüber dem Leerlauf und daher klein gegen h, ändert also nichts Wesentliches. Aus der letzten Gleichung folgt weiter:

$$J_0 h_\omega << \frac{J_0 h}{\omega_0} = \frac{m}{\omega_0};$$

$\frac{m}{\omega_0}$ ist von der gleichen Größenordnung wie m', also ist $J_0 h_\omega$ auch klein gegen

m', und da schon m' im allgemeinen keine Rolle spielt, folgt dasselbe a fortiori für das Zusatzglied $J_0 h_\omega$. Durch die Abhängigkeit der Feldschwächung von der Umdrehungszahl wird also an den Stabilitätsbedingungen nichts Wesentliches geändert.

Das Ergebnis dieses Abschnittes — daß je nach der Ursache der Feldschwächung ($-h'$) das Verhalten des Wendepolmotors ein ganz anderes ist, sowohl in bezug auf die Abhängigkeit der Pendelungsgefahr von der Belastung, als auch in bezug auf die Stabilität der Pendelungen — ist in zweierlei Hinsicht von praktischer Wichtigkeit: Erstens ermöglicht es uns, aus dem Verhalten des Motors auf die Ursache der Pendelungen zu schließen und so die geeignetsten Mittel zu ihrer Beseitigung zu finden. Zweitens weist es uns darauf hin, daß bei Motoren, die infolge eines zu starken Querfeldes zu Pendelungen neigen, die Pendelgefahr einen viel unangenehmeren Charakter hat als bei solchen, bei denen die Pendelungen im wesentlichen durch Bürstenverschiebung oder durch Kurzschlußströme hervorgerufen werden. Denn wenn Motore der letzteren Art, die nur stabile Pendelungen ausführen können, so eingerichtet werden, daß sie nicht von selbst anfangen zu pendeln, d. h. daß bei jeder Belastung die Stabilitätsbedingung (14) erfüllt ist, so können bei ihnen unter keinen Umständen ungedämpfte Pendelungen auftreten; nach einem Anstoß (z. B. einer plötzlichen Belastungs- oder Spannungsänderung) führen sie zwar unter Umständen einige Pendelungen aus, aber diese sind stets gedämpft und die Dämpfung ist um so größer, je größer der Anstoß war. Anders verhalten sich dagegen Motore, bei denen der Einfluß des Querfeldes so stark ist, daß etwa auftretende Pendelungen labil sind. Richtet man einen solchen Motor so ein, daß bei jeder Belastung die Stabilitätsbedingung (14) erfüllt ist, so wird er zwar ebenfalls nicht von selbst anfangen zu pendeln, und auch nach einem kleinen Anstoße mit einigen gedämpften Schwingungen zum Gleichgewicht zurückkehren. Die Dämpfung dieser Schwingungen ist aber um so kleiner, je größer der Anstoß war; und unter Umständen wird, wenn der Anstoß genügend groß gemacht wird, die Dämpfung der Pendelungen negativ, d. h. es tritt Labilität ein.

Derartige Erscheinungen wurden auch bei dem im Abschnitt D untersuchten Motor beobachtet; er war, so wie er geliefert wurde, bei gewöhnlichem Betrieb bei allen Belastungen durchaus stabil, so, daß nach kleinen Anstößen sich das Gleichgewicht fast aperi-

odisch wieder herstellte; nur bei besonders großen Stößen, z. B. bei plötzlichem Einschalten der vollen Belastung, oder wenn man beim Anlassen nicht außerordentlich vorsichtig war, trat Labilität ein, die sich in einem anfangs unverständlichen Durchschmelzen der Sicherung äußerte.

Bei einem Motor mit starker Querfeldwirkung muß also für einen störungsfreien Betrieb mehr verlangt werden als die Erfüllung der Stabilitätsbedingung (14) für jeden Betriebszustand; es muß nicht nur gegen kleine Schwingungen, sondern auch gegen Schwingungen beliebig großer Amplitude Stabilität vorhanden sein. Da bei solch großen Schwingungsamplituden unsere Stabilitätsbedingung nicht mehr zuverlässig ist, auch wenn man für h und h' ihre Mittelwerte einsetzt, so muß man fordern, daß bei einem solchen Motor die für kleine Schwingungen berechnete Dämpfungskonstante $\delta = \frac{a_1}{2}$ einen gewissen positiven Mindestbetrag hat. In den meisten Fällen wird es genügen, wenn statt Gl. (14) die ohne Rücksicht auf die Wirbelströme erhaltene Stabilitätsbedingung:

$$E_0' = \omega_0 h' + W > 0 \qquad (6c)$$

oder

$$M_0' < 0 \qquad (6d)$$

erfüllt ist[1]); will man ganz sicher gehen, so empfiehlt es sich, negative Werte von h' überhaupt zu vermeiden.

J. Mittel zur Beseitigung der Pendelungen. Wir sahen am Schlusse von Abschnitt F, daß Pendelungen eines Wendepolmotors ihre Ursache stets in einem zu großen negativen Betrage von h' haben. Das gegebene Mittel zur Beseitigung der Pendelungen ist die Beseitigung dieser Ursache, also die Verkleinerung von $-h'$. Je nach der Ursache der Pendelungen wird man dabei in verschiedener Weise vorgehen:

a) Wird der negative Betrag von h' durch längsmagnetisierende A.W. hervorgerufen, d. h. dadurch, daß die Bürsten aus der G.N.Z. nach rückwärts verschoben sind, so ist die Abhilfe sehr einfach: Man stelle die Bürsten richtig, d. h. in die G.N.Z. ein. Wie man die richtige Einstellung erkennt, ist auf S. 222 auseinander-

---

1) Versuche an dem in Abschnitt D beschriebenen Motor ergaben z. B. Stabilität auch nach den stärksten Belastungs- oder Spannungsstößen, nachdem durch Anbringung einer feldverstärkenden Compoundwicklung der Betrag von $-h'$ von 0,045 auf 0,021 herabgesetzt worden war; das entspricht ziemlich genau der Bedingung (6c) ($\omega_0 h' + W = -3,65 + 4,0$).

gesetzt. Sollten bei dieser Stellung die Bürsten infolge zu starken Wendepolfeldes funken, so ist durch Vorwärtsschiebung der Bürsten die Kommutierungszone mehr nach dem vorderen Rande der Wendepole hin zu verlegen, wo deren Feld schwächer ist.

b) Rührt der negative Betrag von h' von einem zu starken Einflusse des Querfeldes her, so ist die Abhilfe bei einem vorhandenen Motor schwieriger, weil die eigentliche Ursache, das Querfeld, nicht zu beseitigen ist. Man muß sich in diesem Falle so helfen, daß man die Wirkung des Querfeldes durch zusätzliche längsmagnetisierende A.W. aufhebt. Dies kann auf zweierlei Weise geschehen, nämlich durch eine Compoundwicklung, oder durch Verschiebung der Bürsten nach vorwärts. Letzterer Weg ist der einfachere; er ist aber nur dann gangbar, wenn die Wendepole in Richtung des Ankerumfangs genügend breit sind, nämlich so breit, daß unter der Stelle der Wendepole, die der neuen Bürstenstellung entspricht, das Wendepolfeld noch die zur funkenlosen Kommutation erforderliche Stärke besitzt. Ferner ist die Bürstenverschiebung nicht zulässig bei Motoren, die in beiden Drehrichtungen arbeiten sollen (Reversiermotoren). In diesem Falle bleibt also, ebenso wie bei zu geringer Breite der Wendepole, nichts anderes übrig, als eine Compoundwicklung anzubringen, wie es ja neuerdings bei Motoren für weitgehende Tourenregulierung vielfach gemacht wird.

Beim Entwurf eines neuen Motors kann man, wie im Abschnitt G b gezeigt wurde, ein zu stark negatives h' dadurch vermeiden, daß man den Luftspalt genügend weit wählt. (Die Verkleinerung von $-h'$ durch Vergrößerung des magnetischen Widerstandes und der Sättigung des Jochs ist nach Abschnitt G b zwar ebenfalls möglich, empfiehlt sich aber nicht, weil durch diese Maßnahme die von den Kurzschlußströmen herrührende Feldschwächung vergrößert wird.) In zweifelhaften Fällen tut man gut, die $h(J)$-Kurve auf Grund der im Abschnitt G b gegebenen Beziehungen (Formel 17—21) im voraus zu konstruieren, um einen Anhalt für das zu erwartende h' zu finden und gegebenenfalls ein zu großes $(-h')$ durch nachträgliche Wahl eines weiteren Luftspaltes zu verkleinern.

Ein Nachteil dieser Maßnahme ist, daß sie eine Vergrößerung der Feld-A.W.-Zahl und damit eine Erhöhung der Kupferverluste in der Feldwicklung erforderlich macht. Man hat deshalb, da das Querfeld auch noch andere Nachteile im Gefolge hat, versucht, das Querfeld durch besondere Mittel zu vermindern. Eine

erschöpfende Darstellung der darauf abzielenden speziellen Anordnungen findet sich in dem Arnoldschen Werke[1]); hier seien die wichtigsten angeführt:

Ein relativ einfaches Mittel ist, einen oder mehrere Schlitze in den Polen anzubringen, deren Richtung senkrecht zur Ankeroberfläche und parallel zu den Ankerleitern geht; dadurch wird erreicht, daß der magnetische Widerstand für den Fluß des Querfeldes erhöht wird, oder, in unserer Ausdrucksweise, daß der verzweigte Teil des magnetischen Kreises sich weiter in die Pole hinein erstreckt, also eine größere A.W.-Zahl erfordert; dadurch wird $\frac{d^2h}{dM'^2}$ verkleinert.

Eine andere Anordnung besteht darin, daß man dem Luftspalte eine längs des Ankerumfangs wachsende Weite gibt, indem man die Polschuhe exzentrisch bohrt; dadurch wird erreicht, daß an derjenigen Seite der Pole, an der die Anker-A.W. im gleichen Sinne wirken wie die Feld-A.W., der magnetische Widerstand für den gesamten Fluß größer ist als an der anderen Seite, so daß die sonst eintretende Feldverstärkung an jener Seite verringert, aufgehoben oder sogar in eine Feldschwächung verwandelt wird, je nach der Ankerstromstärke. Richtet man es so ein, daß bei halbem Ankerstrom die Feldverzerrung gerade verschwindet, so wird eine maximale Feldverzerrung jetzt nicht nur bei vollem Strom, sondern auch bei Leerlauf eintreten; die entsprechende maximale Feldschwächung $(-\Delta h)$ ist aber nur so groß wie diejenige, die vorher dem halben Strome entsprach. Bei parabolischem Verlauf der $h(J)$-Kurve ergibt das eine Verringerung des maximalen $(-\Delta h)$ auf ein Viertel, des maximalen $(-h')$ auf die Hälfte seines ursprünglichen Betrages. Die Anordnung ist aber nur anwendbar bei Motoren, die nur in einer Drehrichtung laufen sollen.

Ein drittes Spezialmittel zur Beseitigung des Querfeldes, und zwar das wirksamste, ist die Verwendung einer Kompensationswicklung (Ryan und Thompson), d. i. einer längs der ganzen Polflächen verteilten, vom Ankerstrom durchflossenen Wicklung, die genau der Ankerwicklung entspricht und so geschaltet ist, daß sie die magnetische Wirkung des Ankerstromes an allen Stellen aufhebt. Dadurch wird das Querfeld natürlich vollkommen beseitigt; zur Erzielung dieser Wirkung sind aber so viele A.W. nötig, daß die Ersparnis an Feld-A.W. gegenüber einer Maschine ohne Kom-

1) E. Arnold, Die Gleichstrommaschine, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1906, S. 532—536.

pensationswicklung, die dafür einen entsprechend weiteren Luftspalt besitzt, wieder aufgehoben wird. Da solche kompensierte Maschinen überdies sehr teuer sind, können sie nur in Ausnahmefällen angewandt werden.

c) Wird endlich die zu starke Feldschwächung durch Kurzschlußströme hervorgerufen, so kommen einmal wieder die oben unter b) angeführten „Radikalmittel“ in Frage, nämlich die (gewissermaßen gewaltsame) Verkleinerung von $(-h')$ durch eine Compoundwicklung oder durch Vorwärtsverschiebung der Bürsten. Besser ist es jedoch aus Gründen, die weiter unten angeführt werden, die Feldschwächung durch vollständige oder teilweise Beseitigung ihrer Ursachen (vgl. die Zusammenstellung auf S. 229/230 zu vermindern. Hieraus ergeben sich folgende Möglichkeiten (die Mittel sind größtenteils dieselben, die zur Erzielung einer gleichmäßig guten Kommutation angewendet werden):

1. Vielfach wird man schon durch Verwendung schmalerer Bürsten, die weniger Kollektorlamellen gleichzeitig bedecken, die Pendelungsgefahr beseitigen können.

2. Auch die Verwendung eines anderen Bürstenmaterials (mit höherem Übergangswiderstand gegen Kupfer) kann zum Ziele führen.

3. Falls man erkennt, daß die Pendelungen in einem im Durchschnitt zu starken Wendepolfelde ihre Ursache haben (man erkennt das entweder aus dem damit verbundenen Funken der Bürsten, oder indem man nach dem auf S. 221—222 beschriebenen Verfahren die Wirkung der Kurzschlußströme von der übrigen Ankerrückwirkung trennt), so ist entweder die Wendepolwicklung durch Anbringung eines Nebenschlusses oder Entfernung einiger Windungen zu schwächen, oder es ist durch Verschiebung der Bürsten aus der G.N.Z. die Kommutierungszone mehr nach dem Rande der Wendepole hin zu legen, wo deren Feldstärke geringer ist. Im letzteren Falle kommt nur Vorwärtsverschiebung der Bürsten in Frage, weil bei Rückwärtsverschiebung durch die dann auftretenden entmagnetisierenden Anker-A.W. wieder eine Erhöhung der Pendelgefahr hervorgerufen wird.

Die bisher angeführten Mittel kommen hauptsächlich in Frage, um das Pendeln eines vorhandenen Motors abzustellen. Beim Entwurf eines Motors bieten sich noch folgende weitere Möglichkeiten, um die Pendelgefahr von vornherein möglichst klein zu halten:

4. Der Luftspalt zwischen Hauptpolen und Anker muß genügend weit gewählt werden (wie bei b).

5. Der Luftspalt zwischen Wendepolen und Anker darf nicht zu weit, vor allem aber nicht zu eng sein. Eine Vergrößerung dieses Luftspaltes hat zwar den Nachteil, daß sie mehr Wendepol-A.W. erforderlich macht, so daß bei gleichem Kupfergewicht der Wendepolwicklung die Kupferverluste in ihr größer werden; das ist aber belanglos, weil einerseits die resultierenden Wendepol-A.W. gleich der relativ kleinen Differenz zwischen Anker- und Wendepol-A.W. sind, so daß sie durch eine prozentual kleine Erhöhung der Wendepol-A.W. schon eine beträchtliche Veränderung erfahren, andrerseits die Kupferverluste in der Wendepolwicklung im allgemeinen klein gegen die im Anker sind.

6. Die Wendepole müssen bei vollem Ankerstrom möglichst wenig gesättigt sein; dazu muß man sie möglichst ebenso lang machen wie den Anker. Hierauf muß um so mehr geachtet werden, je größer die Zahl der Anker-A.W. pro cm Ankerumfang, oder je größer die pro qcm Ankeroberfläche entwickelte Wärme ist, insbesondere also bei Motoren, deren Abmessungen im Verhältnis zu ihrer Leistung und Drehzahl klein sind und die deshalb durch künstliche Ventilation besonders gekühlt werden. Mit der Anzahl der Anker-A.W. pro cm Ankerumfang aus Rücksicht auf Pendelungen herunterzugehen, ist nicht angängig, weil dadurch die Leistung des Motors verringert würde.

7. Die Sättigung des Jochs und des Ankers durch das Hauptfeld darf nicht zu groß sein. Andrerseits wird allerdings durch starke Sättigung des Hauptkreises die Wirkung des Querfeldes verringert, aber diese günstige Wirkung der Sättigung wird im allgemeinen weit überwogen von der hier besprochenen ungünstigen Wirkung.

Welches von den vielen aufgezählten Mitteln zur Beseitigung der Pendelungen man im einzelnen Falle anwendet, hängt von den Ursachen der Pendelungen ab; es empfiehlt sich, möglichst diejenigen Mittel zu wählen, welche die Grundursachen des Übels beseitigen. Die oben als „Radikalmittel" bezeichnete Anwendung einer Compoundwicklung oder Bürstenverschiebung führt zwar in allen Fällen auch zum Ziele, hat aber andere Nachteile im Gefolge, die man erkennt, wenn man sich den Verlauf der $h(J)$-Kurve in diesen Fällen überlegt. Man erhält diese Kurve mit großer Annäherung, indem man über die ursprünglich vorhandene $h(J)$-Kurve

die von der Compoundwicklung oder der Bürstenverschiebung herrührende Feldänderung Δh superponiert. Nun ist im allgemeinen die Krümmung der ursprünglichen $h(J)$-Kurve verschieden von derjenigen der zu superponierenden $\Delta h(J)$-Kurve; die resultierende Kurve wird also ebenfalls mehr oder weniger stark gekrümmt sein. Nun soll, damit das System stabil ist, der Anstieg der resultierenden Kurve an keiner Stelle einen gewissen kleinen negativen Betrag unterschreiten (Gl. 14c); dann muß wegen der Krümmung, wenn sie nur einigermaßen merklich ist, an anderen Stellen der Anstieg positiv sein. Bei stärkerer Krümmung werden die Stellen positiven Anstiegs diejenigen negativen Anstiegs überwiegen, d. h. die $h(J)$-Kurve wird im Mittel ansteigende Tendenz haben, und damit ist ein starker Tourenabfall zwischen Leerlauf und Vollast verknüpft. Wenn man also Pendelungen durch eine Compoundwicklung oder durch Bürstenverschiebung beseitigt, so wird man in vielen Fällen einen Erfolg nur durch einen starken Tourenabfall bei Belastung erkaufen können.

Insbesondere gilt das, wenn die Feldschwächung durch ein zu starkes Querfeld verursacht wird. Denn einerseits ist hier sowohl die ursprüngliche $h(J)$-Kurve, als auch die zu superponierende $\Delta h(J)$-Kurve (vgl. Fig. 60, S. 209) nach unten konkav, die resultierende $h(J)$-Kurve muß es also in noch stärkerem Maße sein. Andrerseits muß hier, wie oben gezeigt, wegen der Labilität der Schwingungen h' besonders klein gehalten werden, mindestens so klein, daß an keiner Stelle $M_0' > 0$ wird. Die mechanische Charakteristik des Motors wird sich daher im Mittel beträchtlich von der senkrechten Richtung entfernen, der Tourenabfall wird sehr groß. Man darf also, wenn man auf Unabhängigkeit der Umdrehungszahl von der Belastung Wert legt, die Wirkung eines zu starken Querfeldes nicht durch eine Compoundwicklung oder Bürstenverschiebung beseitigen, sondern muß das Querfeld selbst durch eins der oben aufgeführten Mittel genügend abschwächen.

Die bisher aufgezählten Maßnahmen erzielen Stabilität durch Beseitigung eines zu großen Betrages von $(-h')$. Es bleibt noch zu besprechen, wie man durch Änderung der übrigen Konstanten des Motors etwa auftretende Pendelungen beseitigen kann. Da kommen nur zwei Möglichkeiten in Frage: Erstens kann man durch Einschalten eines Widerstandes in den Ankerstromkreis W vergrößern. Da jedoch damit der Wirkungsgrad des Motors verringert wird, so kommt dieses Mittel nur als Notbehelf in Betracht in solchen Fällen, wo

eine Beseitigung des Pendelns durch Bürstenverschiebung — was stets das einfachste und sicherste Hilfsmittel ist — nicht angängig ist, z. B. bei einem Reversiermotor, aber auch dann nur als provisorische Maßnahme. Zweitens kann man vielleicht die Zeitkonstante $\frac{L}{R}$ des äquivalenten Wirbelstromkreises vergrößern, entweder dadurch, daß man auf den Hauptpolen eine kurzgeschlossene Wicklung oder geschlossene dicke Kupferringe anbringt, oder dadurch, daß man den Widerstand des Erregerkreises verkleinert. Letzteres läßt sich in der Weise ausführen, daß man parallel zur Feldwicklung einen Widerstand schaltet und den Vorschaltwiderstand entsprechend verkleinert, um wieder den gleichen Strom in der Feldwicklung zu erhalten. Ob diese beiden Mittel zu einem nennenswerten Erfolge führen, und welches von ihnen empfehlenswerter ist, kann nur der Versuch lehren; meines Wissens sind Versuche in dieser Richtung bisher noch nicht gemacht.

Nachtrag. Nachdem diese Arbeit schon nahezu abgeschlossen war, erhielt der Verf. Kenntnis von einer Arbeit von Humburg[1]), in der das Problem des § 16 theoretisch und experimentell sehr gründlich untersucht ist. Leider konnte diese Untersuchung, von einzelnen Bemerkungen abgesehen, nicht mehr mit in das vorliegende Buch eingearbeitet werden; es sei daher gestattet, mit einigen Worten zu ihr Stellung zu nehmen. Im theoretischen Teil, in dem die Schwingungsdifferentialgleichung aufgestellt und integriert wird, unterscheidet sich der Ansatz von Humburg von dem unsrigen dadurch, daß er die Ankerselbstinduktion von vornherein vernachlässigt, dafür aber gleich einen Teil der Wirbelströme, nämlich die in der Feldwicklung induzierten Ströme berücksichtigt. Er gelangt so formal zu den gleichen Stabilitätsbedingungen wie wir (Gl. (14) und (15), § 16), nur bedeutet bei ihm $\frac{L}{R}$ die Zeitkonstante der Magnetwicklung, während bei uns $\frac{L}{R}$ die Zeitkonstante des äquivalenten Wirbelstromkreises ist. Der Humburgsche Ansatz involviert also die Annahme, daß die Wirkung der eigentlichen Wirbelströme gegen diejenige der in der Feldwicklung induzierten Ströme zu vernachlässigen sei; inwieweit diese Annahme berechtigt ist, kann nur durch Versuche entschieden werden. In dem von uns untersuchten Falle ergab eine überschlägliche Rechnung, daß die Zeitkonstante der Feldwicklung erheblich kleiner war als der aus unserm Versuch berechnete Wert; dort müßten also auch wirkliche Wirbelströme eine Rolle gespielt haben. In der Diskussion seiner Stabilitätsbedingung gelangt Humburg im ganzen zu den gleichen Resultaten wie wir; erwähnt sei sein Versuch, den Einfluß der Typengröße auf die Stabilität zu diskutieren,

1) K. Humburg, Das Pendeln bei Gleichstrommotoren mit Wendepolen. Berlin 1912.

